

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

1. (7 баллов) Точка  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ . Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках  $A, B, C, D, O$ , сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

**Решение.** Например, подойдёт цепочка  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .

**Критерии проверки.**

- Приведён верный набор из семи векторов, либо доказано, что его сумма равна нулевому вектору, либо очевидно (исходя из обозначений векторов), что сумма равна нулевому вектору (например, так, как указано в ответе) — 7 баллов.
- Приведён верный набор из семи векторов, про который не доказано, что его сумма равна нулевому вектору, — 5 баллов.
- Приведён набор из шести векторов, удовлетворяющий остальным условиям задачи, — 2 балла.
- Приведён набор из семи векторов, но среди них есть одна пара равных векторов — 1 балл.
- Приведён набор векторов, сумма которых не равна нулевому вектору, — 0 баллов.

2. (7 баллов) Можно ли все натуральные числа от 1 до 800 разбить на пары так, чтобы сумма любой пары чисел делилась на 6?

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Если требуемое в задаче возможно, то числа, кратные шести, должны разбиться на пары. Так как  $800 = 133 \cdot 6 + 2$ , чисел от 1 до 800, кратных шести, ровно 133. Противоречие: 133 числа нельзя разбить на пары.

*Замечание.* Среди чисел от 1 до 800 остаток 0 при делении на 6 дают 133 числа, остаток 1 — 134 числа, остаток 2 — 134 числа, остаток 3 — 133 числа, остаток 4 — 133 числа, остаток 5 — 133 числа. Следовательно, противоречие также можно получить иначе. Например, число, дающее остаток 1, должно быть в паре с числом, дающим остаток 5. Значит, таких чисел должно быть поровну, что не так.

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно подсчитано количество чисел с теми остатками, на которых основано получение противоречия, но ошибочно указано количество чисел с какими-то другими остатками — 5 баллов.
- Утверждается, что «не сойдутся остатки чисел», но не приводятся конкретные противоречия. Например, говорится, что чисел, кратных 6, нечётное количество, но не объясняется почему — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

3. (7 баллов) Участвуя в шахматном турнире, Вася сыграл 52 партии. По старой системе подсчёта очков (1 очко за победу,  $\frac{1}{2}$  очка за ничью и 0 очков за поражение) он набрал 35 очков. Сколько очков он набрал по новой системе подсчёта очков (1 очко за победу, 0 очков за ничью и  $-1$  очко за поражение)?

**Ответ.** 18 очков.

**Решение.**

*Первый способ.* Пусть Вася в турнире  $a$  раз победил,  $b$  раз сыграл вничью и  $c$  раз проиграл. Тогда  $a + b + c = 52$ ,  $a + \frac{b}{2} = 35$ . Нужно найти значение  $a - c$ . Из второго соотношения следует, что  $b = 70 - 2a$ . Тогда  $a + (70 - 2a) + c = 52$ , откуда  $70 + c - a = 52$ ,  $a - c = 18$ .

*Второй способ.* При системе подсчёта  $(1; \frac{1}{2}; 0)$  Вася набрал 35 очков, значит, при системе  $(2; 1; 0)$  он наберёт вдвое больше, то есть 70 очков.

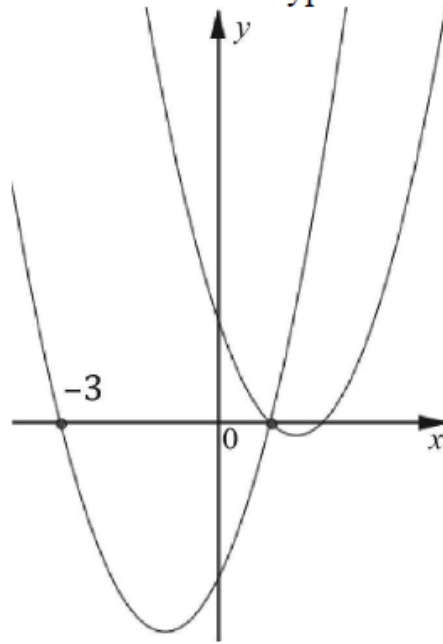
При системе  $(1; 0; -1)$  Вася теряет по одному очку в каждой партии (по сравнению с системой  $(2; 1; 0)$ ). Значит, он наберёт  $70 - 52 = 18$  очков.

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное рассуждение, в котором верный ответ не получен из-за арифметической ошибки, — 5 баллов.
- Рассмотрен частный случай, то есть конкретные значения числа побед, ничьих и поражений, удовлетворяющие условию задачи, и получен верный ответ — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

4. (7 баллов) На координатной плоскости изображены графики функций  $y = x^2 + bx + c$  и  $y = x^2 + cx + b$ .

Найдите значения  $b$  и  $c$ . В ответе запишите уравнения каждой из функций.



**Ответ.**  $y = x^2 + 2x - 3$  и  $y = x^2 - 3x + 2$ .

**Решение.** Некоторое число  $t$  является корнем обоих трёхчленов, поэтому  $t^2 + bt + c = t^2 + ct + b$ , откуда  $(b - c)(t - 1) = 0$ . Так как  $b \neq c$  (иначе параболы совпадут), получаем, что  $t = 1$ . Если парабола  $y = x^2 + bx + c$  пересекает ось абсцисс в точках  $-3$  и  $1$ , то по теореме, обратной теореме Виета  $b = -(-3 + 1) = 2$ ,  $c = -3 \cdot 1 = -3$ .

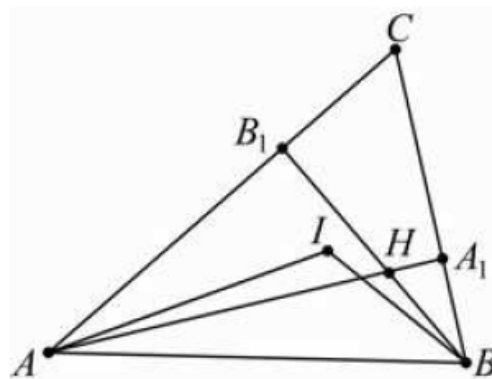
**Критерии проверки.**

- Полное верное решение — 7 баллов.
- Приведён верный ответ, и показано, что он подходит (в частности, указана координата общей точки пересечения парабол с осью абсцисс), — 3 балла.
- Верно найден общий корень, но при нахождении коэффициентов получены неверные значения из-за арифметической ошибки — 2 балла.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

5. (7 баллов) Две вершины, центр вписанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника лежат на одной окружности. Найдите угол при третьей вершине.

**Ответ.**  $60^\circ$ .

**Решение.** Рассмотрим треугольник  $ABC$ , в котором проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Пусть точка  $H$  — точка пересечения высот, точка  $I$  — центр вписанной окружности.



1. Сумма углов четырёхугольника  $A_1HB_1C$  равна  $360^\circ$ . Получаем

$$\begin{aligned} \angle AHB = \angle A_1HB_1 &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle C = \\ &= 180^\circ - \angle C. \end{aligned}$$

2. По теореме о сумме углов треугольника имеем соотношения  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (для треугольника  $ABC$ ) и  $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \angle AIB = 180^\circ$  (для треугольника  $ABI$ ). Отсюда

$$\angle AIB = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180^\circ - (180^\circ - \angle C) : 2 \Rightarrow \angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}.$$

3. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $H$  и  $I$  лежат на одной окружности. Так как треугольник  $ABC$  остроугольный, точки  $H$  и  $I$  лежат по одну сторону от хорды  $AB$ , то есть вписанные углы  $AIB$  и  $AHB$  опираются на одну и ту же дугу. Значит,

$$\angle AIB = \angle AHB, \text{ откуда } 90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle C, \text{ а значит } \angle C = 60^\circ.$$

### Критерии проверки.

- Полное верное решение — 7 баллов.

*Замечание.* Если ученик ссылается на результаты пунктов 1 и 2 решения как на общеизвестные, то баллы не снижать.

- В целом верный ход решения, но упущено обоснование того, что углы  $AIB$  и  $AHB$  опираются на одну и ту же дугу (не использовано то, что треугольник остроугольный), — 5 баллов.

- В целом верный ход решения, но при решении уравнения  $90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle C$  допущена ошибка и получен неверный ответ — 5 баллов.

- Приведены пункты 1 и 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 2 балла.

- Приведён только пункт 1 или только пункт 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 1 балла.

- Приведён только ответ — 0 баллов.