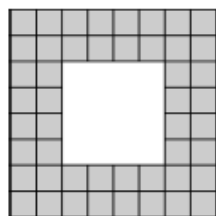


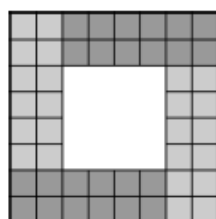
ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

1. (7 баллов) В рамке  $8 \times 8$  шириной в 2 клетки (см. рисунок) всего 48 клеточек. Сколько клеточек в рамке  $254 \times 254$  шириной в 2 клетки?



**Ответ.** 2016.

**Решение.** *Первый способ.* Разрежем рамку на четыре одинаковых прямоугольника так, как показано на рисунке. Ширина прямоугольников равна ширине рамки, т. е. 2 клетки. Длина каждого прямоугольника на 2 меньше стороны рамки:  $254 - 2 = 252$  клетки. Тогда площадь одного прямоугольника равна  $2 \cdot 252 = 504$ . А значит, всего в рамке  $4 \cdot 504 = 2016$  клеток.



*Второй способ.* Площадь рамки можно получить, если из площади квадрата  $254 \times 254$  вычесть площадь внутреннего квадрата. Сторона внутреннего квадрата на 4 клетки меньше стороны большого. Значит, площадь рамки равна

$$254^2 - 250^2 = (254 - 250)(254 + 250) = 4 \cdot 504 = 2016.$$

*Замечание.* Если обозначить сторону рамки через  $n$ , то можно доказать (например, описанными выше способами), что её площадь будет равна  $8n - 16$  клеток.

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка — 3 балла.
- Верное рассуждение, но допущена ошибка в оценке размеров (например, во втором способе ошибочно считается, что внутренний квадрат имеет сторону на 2 клетки меньше, чем большой) — 2 балла.
- Только верный ответ — 1 балл.

2. (7 баллов) Аня перемножила 20 двоек, а Ваня перемножил 17 пятёрок. Теперь они собираются перемножить свои огромные числа. Какова будет сумма цифр произведения?

**Ответ.** 8.

**Решение.** Всего перемножается 20 двоек и 17 пятёрок. Переставим сомножители, чередуя двойки и пятёрки. Получится 17 пар  $2 \cdot 5$  и ещё три двойки, дающие в произведении 8. Итак, число 8 нужно 17 раз умножить на 10. Получается число, состоящее из цифры 8 и 17 нулей. Сумма цифр равна 8. Другой способ записи тех же рассуждений можно получить, используя свойства степеней:

$$2^{20} \cdot 5^{17} = 2^3 \cdot 2^{17} \cdot 5^{17} = 8 \cdot (2 \cdot 5)^{17} = 8 \cdot 10^{17} = 800\,000\,000\,000\,000\,000.$$

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верный ход решения, получено верное произведение, но сумма цифр не указана — 5 баллов.
- Сделана группировка двоек и пятёрок по парам, дающим десятки, но ответ не получен или получен неверно — 2 балла.

3. (7 баллов) В выражении  $\frac{P \cdot A \cdot 3 + P \cdot E \cdot 3 \cdot A \cdot \dot{Y}}{C \cdot P \cdot A \cdot 3 \cdot U}$  замените каждую из букв  $P, A, 3, E, \dot{Y}, C, U$  на какую-то из цифр от 1 до 9 (одинаковые буквы — на одинаковые цифры, разные буквы — на разные цифры) так, чтобы значение выражения получилось наибольшим. *Покажите, как нужно расставить цифры, вычислите значение вашего выражения и объясните, почему оно наибольшее.*

**Ответ.** Наибольшее значение равно 36,5 и достигается, например, при  $C = 1, U = 2, E = 9, \dot{Y} = 8, P = 4, A = 5, 3 = 6$ .

**Решение.** Вынесем за скобки общий множитель в числителе дроби и сократим:

$$\frac{P \cdot A \cdot 3 \cdot (1 + E \cdot \dot{Y})}{P \cdot A \cdot 3 \cdot C \cdot U} = \frac{1 + E \cdot \dot{Y}}{C \cdot U}.$$
 Поскольку каждая буква заменяет одну цифру,

$$C \cdot U \geq 2 \text{ и } E \cdot \dot{Y} \leq 72. \text{ Поэтому } \frac{1 + E \cdot \dot{Y}}{C \cdot U} \leq \frac{1 + 72}{2} = 36,5.$$

Осталось как-нибудь заменить все буквы  $P, A, 3, E, \dot{Y}, C, U$  на цифры так, чтобы значение 36,5 достигалось. Для этого необходимо поставить вместо  $C$  и  $U$  цифры 1 и 2 в любом порядке, вместо  $E$  и  $\dot{Y}$  — цифры 8, 9 в любом порядке, а оставшиеся буквы  $P, A$  и  $3$  заменить на какие-либо из оставшихся цифр, например, так:  $P = 4, A = 5, 3 = 6$ .

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное решение, но ничего не написано про цифры, которыми нужно заменить буквы  $P, A$  и  $3$ , — 6 баллов.

- Верно и обосновано найдено, какими цифрами нужно заменить  $C$ ,  $V$ ,  $E$ ,  $Й$ , но допущена арифметическая ошибка и получен неверный ответ — 4 балла.
- Приведены верный ответ и верный пример расстановки цифр, но не доказано, что это значение наибольшее (сокращение дроби не выполнено), — 3 балла.
- Верно выполнено сокращение дроби, но дальнейшие рассуждения отсутствуют или неверны — 2 балла.
- Приведён верный пример расстановки цифр, значение выражения не найдено или найдено неверно, его максимальность не доказана — 1 балл.

4. (7 баллов) В комнате 10 ламп. Петя сказал: «В этой комнате есть 5 включённых ламп». Вася ему ответил: «Ты не прав». И добавил: «В этой комнате есть три выключенные лампы». Коля же сказал: «Включено чётное число ламп». Оказалось, что из четырёх сделанных утверждений только одно верное. Сколько ламп включено?

**Ответ.** 9.

**Решение.** Первое и третье утверждения одновременно не могут быть оба неверными, иначе в комнате было бы меньше пяти включённых ламп и меньше трёх выключенных, т. е. всего меньше восьми ламп, что противоречит условию. Первое и второе утверждения также не могут быть одновременно неверными. Значит, среди утверждений 1 и 3 есть верное, и среди утверждений 1 и 2 есть верное. Поскольку верное утверждение всего одно, это утверждение 1, а остальные утверждения неверны.

Значит, в комнате меньше трёх выключенных ламп (так как утверждение 3 неверно). Тогда включённых ламп хотя бы восемь, причём их количество нечётно (так как утверждение 4 неверно). Значит, их девять.

**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное и полное решение, но дан ответ не на тот вопрос («1 выключенная лампа») — 6 баллов.
- Сказано, но не доказано, что верным может быть только утверждение 1, зато потом из этого факта верно выведено, что включённых ламп 9, — 3 балла.
- Объяснено, что верным может быть только утверждение 1, но далее сделана одна ошибка при построении отрицаний к одному из утверждений 2, 3, 4, приводящая к неверному ответу (например, где-то «включено» перепутано с «выключено» или «чётное» не превращено в «нечётное»), — 3 балла.
- Объяснено, что верным может быть только утверждение 1, но дальнейшие рассуждения неверны или в них сделано не менее двух ошибок при построении отрицаний — 2 балла.
- Приведён верный ответ, и без обоснования указано, что при этом верно только утверждение 1, но не объяснено, почему не может быть верно другое утверждение и почему не возможен какой-либо другой ответ, — 2 балла.

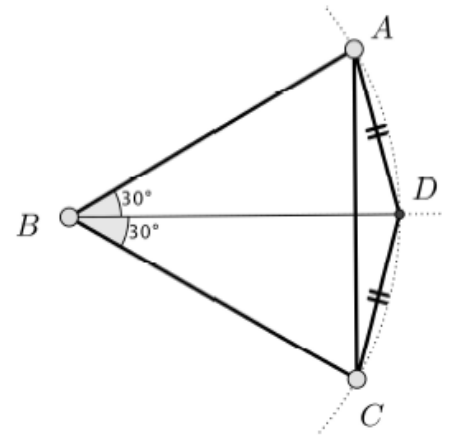
- Приведён только ответ — 0 баллов.

5. (7 баллов) Незнайка измерил длины сторон и диагоналей своего четырёхугольного земельного участка, записал в блокнот результаты шести измерений и тут же забыл, какие числа относились к диагоналям, а какие — к сторонам. Потом он заметил, что среди написанных чисел есть четыре одинаковых, а два оставшихся числа тоже равны между собой. Незнайка обрадовался и сделал вывод, что его участок — квадрат. Обязательно ли это так? Если ответ «да», то утверждение нужно доказать, если ответ «нет» — привести опровергающий пример и его обосновать.

**Ответ.** Нет, необязательно.

**Решение.** Построим равносторонний треугольник  $ABC$  и на биссектрисе его угла  $B$  отложим отрезок  $BD$ , равный  $AB$ . В четырёхугольнике  $ABCD$  имеем  $AB = BC = CA = BD$  (по построению) и  $AD = DC$  (например, из равенства треугольников  $BAD$  и  $BCD$  по двум сторонам и углу между ними). Очевидно, что построенный четырёхугольник не является квадратом (например, так как угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ ). Участок Незнайки мог иметь форму этого четырёхугольника.

*Замечание.* Возможен и участок невыпуклой формы, обладающий теми же свойствами.



**Критерии проверки.**

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Правильная, хорошо читаемая картинка, симметричная относительно одной из диагоналей, на которой отмечены равные отрезки (четыре одних и два других), но построение никак не описано — 3 балла.
- Указано, что могут выполняться равенства  $AB = BC = CA = BD$  и  $AD = DC$ , но ни чертежа, ни описания конструкции нет, либо есть только невнятная картинка с правильно указанными равными отрезками, из которой не очевидно, почему такие равенства отрезков можно получить, — 2 балла.