Задачи и решения к муниципальному этапу Всероссийской олимпиады школьников по астрономии 2017-2018 учебного года

11 класс

Задача № 1.

Астероид, обращающийся вокруг Солнца, приближается к Земле на минимальное расстояние равное 3 а.е. Чему равен период его обращения? Орбиты Земли и астероида считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение.

Так как минимальное расстояние между Землёй и астероидом больше 1 а.е., то астероид является внешним по отношению к Земле телом. Расстояние между Землёй и астероидом минимально в момент противостояния. Значит радиус его орбиты

$$\boldsymbol{r}_{\text{астероид}} = \boldsymbol{r}_{\oplus} + \boldsymbol{d_{min}}$$

Запишем третий закон Кеплера для астероида и Земли

$$\left(\frac{\boldsymbol{r}_{\text{астероид}}}{\boldsymbol{r}_{\oplus}}\right)^{\mathbf{3}} = \left(\frac{\boldsymbol{T}_{\text{астероид}}}{\boldsymbol{T}_{\oplus}}\right)^{\mathbf{2}}$$

Откуда, учитывая формулу для $\boldsymbol{r}_{\text{астероид}}$ имеем

$$\boldsymbol{T}_{\text{астероид}} = \boldsymbol{T}_{\oplus} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}_{\oplus} + \boldsymbol{d_{min}}}{\boldsymbol{r}_{\oplus}}\right)^{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$$

Подставляем численные значения

$$\boldsymbol{T}_{\text{астероид}} = \mathbf{1}\ \text{год} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}\ \text{а.е.} + \mathbf{3}\ \text{а.е}}{\mathbf{1}\ \text{а.е.}}\right)^{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}} = \mathbf{8}\ \text{лет}$$

Ответ: 8 лет

Задача № 2.

21 марта в Анадыре Солнце взошло на 9 часов 11 минут и 42 секунды раньше, чем в Липецке (39º36′ в.д.). Оцените географическую долготу Анадыря. Атмосферную рефракцию не учитывать.

Решение.

Уравнение восхода без учёта атмосферной рефракции выглядит так

$$\cos \boldsymbol{t} = -\operatorname{tg} \boldsymbol{\varphi} \cdot \operatorname{tg} \boldsymbol{\delta}$$

где $\boldsymbol{t}$ – часовой угол Солнца в момент восхода или захода (для восхода $\boldsymbol{t < 0}$, для захода $\boldsymbol{t > 0}$), $\boldsymbol{\varphi}$ – широта места наблюдения, $\boldsymbol{\delta}$ – склонение Солнца на расчётную дату. Так как Солнце в непосредственной близости к точке весеннего равноденствия, то его склонение близко к нулю, а значит, время восхода или захода не будет зависеть от широты места наблюдения. Это обоснование обязательно в том или ином виде. Без него необходимо учитывать широту места наблюдения. Вместо приведённого обоснования достаточно указать, что восход 21 марта происходит в непосредственной близости к моменту весеннего равноденствия, поэтому интервал времени между восходами Солнца в разных пунктах не зависит от их широты.

Так как восход Солнца происходит раньше, то Анадырь расположен восточнее Липецка. Поэтому его долгота больше на 9 часов 11 минут и 42 секунды (если измерять долготу в часовой мере). Переведём часовую меру в угловую

$$\boldsymbol{9^h 11^m 42^s = 9 \cdot 15° + 11 \cdot 15' + 42 \cdot 15'' = 135°165'630'' = 137°55'30''}$$

Добавим вычисленную разницу к долготе Липецка

$$\boldsymbol{\lambda_{\text{Анадырь}} = 39°36' + 137°55'30'' = 176°91'30'' = 177°31'30''}$$

Ответ: $\boldsymbol{177°31'30''}$ восточной долготы

<u>Задача № 3.</u>

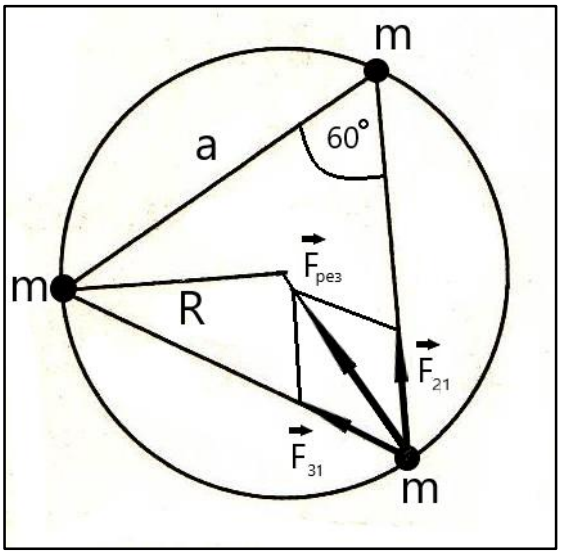
Три звезды одинаковой массы $\boldsymbol{m}$ находятся в вершинах правильного треугольника и движутся по одной окружности радиуса $\boldsymbol{R}$ с периодом $\boldsymbol{T}$. Получите формулу для вычисления масс звёзд.

Решение.

Вычислим результирующую силу, действующую на звезду со стороны двух других.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_{\text{рез}}} = \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}}}$$

где $\boldsymbol{\overrightarrow{F_{21}}}$ и $\boldsymbol{\overrightarrow{F_{31}}}$ – силы, действующие на первую звезду со стороны второй и третьей соответственно (смотри рисунок).



Так как звёзды расположены в вершинах правильного треугольника и их массы одинаковы, то модули этих сил равны между собой

$$\boldsymbol{F_{21} = F_{31} = F = G \cdot \frac{m^2}{a^2}}$$

где $\boldsymbol{a}$ – длина стороны правильного треугольника. Вспоминая, что

$$\boldsymbol{a = \sqrt{3} \cdot R}$$

получаем

$$\boldsymbol{F = \frac{G \cdot m^2}{3 \cdot R^2}}$$

Модуль результирующей силы $\boldsymbol{F}_{\text{рез}}$ представляет из себя бóльшую диагональ ромба со стороной $\boldsymbol{F}$ и острым углом $\boldsymbol{\alpha = 60°}$ (так как треугольник правильный). Такую диагональ можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{F}_{\text{рез}} = \boldsymbol{\sqrt{2} \cdot F \cdot \sqrt{1 + \cos \alpha}}$$

Учитывая формулу для $\boldsymbol{F}$ и то, что $\boldsymbol{\cos 60° = \frac{1}{2}}$, имеем

$$\boldsymbol{F}_{\text{рез}} = \boldsymbol{\frac{G \cdot m^2}{\sqrt{3} \cdot R^2}}$$

С другой стороны, так как звёзды движутся по одной и той же окружности, то результирующая сила является центростремительной

$$\boldsymbol{F}_{\text{рез}} = \boldsymbol{m \cdot \frac{v^2}{R}}$$

Вспоминая, что

$$\boldsymbol{v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}}$$

получаем

$$\boldsymbol{F}_{\text{рез}} = \boldsymbol{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2}}$$

Приравниваем два выражения для $\boldsymbol{F}_{\text{рез}}$ и выражаем массу

$$\boldsymbol{m = \frac{4\sqrt{3} \cdot \pi^2}{G} \cdot \frac{R^3}{T^2}}$$

Ответ: $\boldsymbol{m = \frac{4\sqrt{3} \cdot \pi^2}{G} \cdot \frac{R^3}{T^2}}$

Задача № 4.

Оцените массу атмосферы Титана, если известно, что величина атмосферного давления у поверхности Титана в 1,5 раза больше, чем величина давления атмосферы у поверхности Земли, а радиус и масса Титана примерно в 2,5 и 44,4 раза меньше радиуса и массы Земли соответственно.

Решение.

Простую, но достаточно точную оценку можно получить, если считать, что вся атмосфера Титана собрана в приповерхностном слое постоянной плотности, равной плотности у поверхности. Тогда давление можно вычислить по известной формуле

$$\boldsymbol{p = \rho \cdot g \cdot h}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – плотность атмосферы у поверхности Титана, $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения на его поверхности, $\boldsymbol{h}$ – высота такой однородной атмосферы. Такая атмосфера получится достаточно тонкой, поэтому изменением $\boldsymbol{g}$ с высотой можно пренебречь. Массу атмосферы можно оценить, используя формулу

$$\boldsymbol{m = \rho \cdot V}$$

где $\boldsymbol{V}$ – объём атмосферы Титана. Так как атмосфера достаточно тонкая, то этот объём можно представить как произведение площади поверхности Титана на высоту атмосферы

$$\boldsymbol{V = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}$$

где $\boldsymbol{R}$ – радиус Титана. Тогда масса атмосферы

$$\boldsymbol{m = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot h}$$

Выражая произведение $\boldsymbol{\rho \cdot h}$ из формулы для давления, и подставляя в полученное выражение для массы, имеем

$$\boldsymbol{m = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{p}{g}}$$

Учтём, что ускорение свободного падения на поверхности Титана можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{g = \frac{G \cdot M}{R^2}}$$

где $\boldsymbol{G}$ – гравитационная постоянная, а $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{R}$ – масса и радиус Титана соответственно.

Тогда окончательно получаем

$$\boldsymbol{m = \frac{4 \cdot \pi \cdot p \cdot R^4}{G \cdot M}}$$

Вспоминая, что по условию задачи

$$\boldsymbol{p = 1,5 \cdot p_{\oplus}}$$

$$\boldsymbol{M = \frac{M_{\oplus}}{44,4}}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{R_{\oplus}}{2,5}}$$

Получаем выражение для массы атмосферы Титана через параметры Земли

$$\boldsymbol{m \approx \frac{6,82 \cdot \pi \cdot p_{\oplus} \cdot {R_{\oplus}}^{4}}{G \cdot M_{\oplus}}}$$

Подставляем численные значения

$$\boldsymbol{m \approx \frac{6,82 \cdot 3,14 \cdot 10^{5}\text{Па} \cdot (6,378 \cdot 10^{6}\ \text{м})^{4}}{6,672 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^{3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24}\text{кг}} \approx 8,9 \cdot 10^{18}}\ \text{кг}$$

Реальная масса атмосферы Титана $\boldsymbol{8,7 \cdot 10^{18}}$ кг. Мы ошиблись совсем немного.

Ответ: примерно $\boldsymbol{8,9 \cdot 10^{18}}$ кг

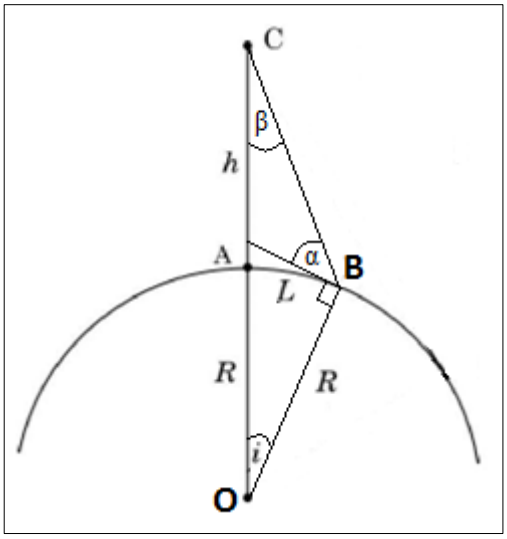
Задача № 5.

Искусственный спутник движется по круговой орбите на высоте **12 800** км над поверхностью Земли. Вы находитесь в Липецке и видите спутник прямо над головой. На каком максимальном расстоянии от Вас (по поверхности Земли) может находиться Ваш друг, чтобы он мог видеть этот спутник одновременно с Вами на высоте **60°** над горизонтом? Величина рефракции рассчитывается по формуле $\boldsymbol{\rho = 60,25'' \cdot tg\, z}$, где $\boldsymbol{z}$ – зенитное расстояние объекта наблюдения. Землю считать идеальным шаром.

Решение.

В момент наблюдения вы находитесь в точке **A**, Ваш приятель – в точке **B**, а спутник в точке **C** (смотри рисунок). Необходимо найти дугу окружности **L**.

$$L = \frac{i}{180°} \cdot \pi \cdot R$$



Рассмотрим сначала ситуацию без рефракции. Спутник на высоте **α** над горизонтом. Понятно, что задача сводится к нахождению угла ***i***, по которому затем вычисляется соответствующая дуга **L**. В треугольнике **OBC** одна сторона равна **R+h**, вторая **R** и один из углов **90°+α**.

По теореме синусов имеем

$$\frac{R}{\sin\beta} = \frac{R+h}{\sin(90° + \alpha)}$$

Откуда получаем

$$\sin\beta = \frac{R}{R+h} \cdot \sin(90° + \alpha) = \frac{R}{R+h} \cdot \cos\alpha$$

Тогда угол ***i*** находится так

$$i = 180° - (90° + \alpha) - \beta = 90° - \alpha - \beta,$$

А соответствующая ему дуга

$$L = \frac{90° - \alpha - \beta}{180°} \cdot \pi \cdot R$$

Теперь учтём тот факт, что при наличии рефракции мы видим объекты выше над горизонтом, чем их действительное положение (рефракция «приподнимает» объекты над горизонтом). То есть, чтобы Ваш друг видел объект на высоте **30°** над горизонтом, в действительности объект должен находиться ниже над горизонтом на величину рефракции. Тогда тот угол, который мы обозначили как **α**, будет на самом деле равен **α-ρ**. Значит в полученных нами формулах необходимо везде угол **α** заменить на **α-ρ**.

Теперь вычислим рефракцию. Вспоминая, что высота объекта над горизонтом и его зенитное расстояние в сумме составляют **90°**, получаем

$$z = 90° - (\alpha - \rho) = 90° - \alpha + \rho.$$

Тогда

$$\rho = 60,25'' \cdot tg(90° - \alpha + \rho)$$

Получаем относительно ***ρ*** достаточно сложное уравнение. Однако учитывая, что величина рефракции для зенитных расстояний $z = 90° - \alpha$ и $z = 90° - \alpha + \rho$ отличается крайне незначительно, можно принять

$$\rho = 60,25'' \cdot tg(90° - \alpha)$$

Окончательно имеем

$$\sin\beta = \frac{R}{R+h} \cdot \cos(\alpha - 60,25'' \cdot tg(90° - \alpha))$$

$$i = 90° - \alpha + \rho - \beta$$

$$L = \frac{i}{180°} \cdot \pi \cdot R$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\sin\beta = \frac{6400\text{ км}}{6400\text{ км} + 12800\text{ км}} \cdot \cos(60° - 60,25'' \cdot tg\,30°)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \cos\left(60° - 60,25'' \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx \frac{1}{3} \cdot \cos(60° - 34,79'')$$
$$\approx \frac{1}{3} \cdot \cos(60° - 0,58°) \approx 0,17$$

Откуда угол $\beta \approx 9,8°$. Тогда $i = 90° - 60° + 0,58° - 9,8° = 20,78°$

$$L \approx \frac{20,78°}{180°} \cdot 3,14 \cdot 6400\text{ км} \approx 2320\text{ км}$$

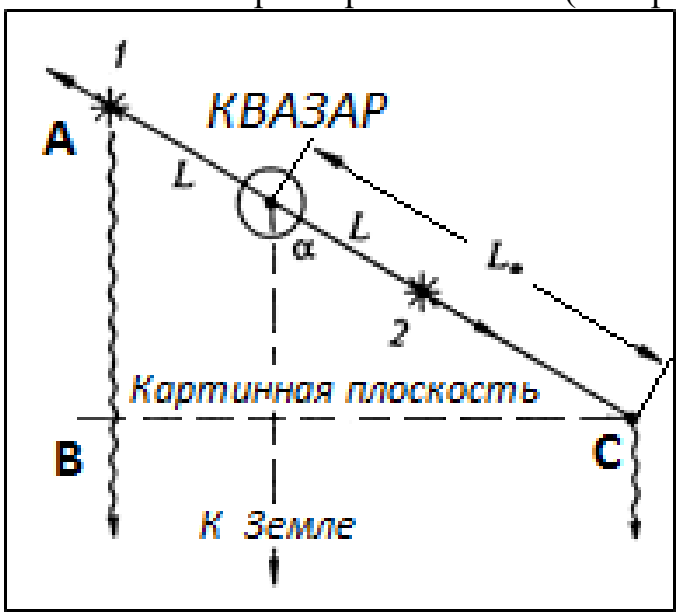
Ответ: примерно **2 320** км

Задача № 6.

Из очень далёкого квазара вылетают в противоположных направлениях вдоль одной прямой, ориентированной под углом 60° к лучу зрения, два источника радиоволн, и движутся с одинаковой постоянной скоростью $V = \frac{2}{3} \cdot c$ (где **c** – скорость света). Во сколько раз один источник будет нам казаться ближе к квазару, чем другой?

Решение.

Пусть источники удалились от квазара на расстояние ***L*** (смотри рисунок).



Радиоволнам, испущенным удаляющимся источником 1 требуется некоторое время, чтобы достигнуть картинной плоскости, в которой движется приближающийся источник 1. Далее радиоволны пойдут синхронно, и мы примем их на Земле одновременно. То есть мы примем одновременно радиоволны, испущенные источником 1 когда он был ближе к квазару и источником 2 когда он был дальше от квазара. Именно поэтому один источник радиоволн будет казаться нам дальше от квазара, чем другой. Найдём время, необходимое для того, чтобы сигнал, испущенный удаляющимся источником (1), достиг картинной

плоскости, в которой движется приближающийся к нам источник (2). Используем для этого треугольник ABC (смотри рисунок).

Его гипотенуза

$$\mathbf{AC} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} \cdot \Delta \boldsymbol{t}$$

где $\boldsymbol{V} \cdot \Delta \boldsymbol{t}$ – расстояние, которое пройдёт источник 2, пока его будет догонять волна, испущенная источником 1.

Катет AB

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{c} \cdot \Delta \boldsymbol{t}$$

где **c** – скорость света. Тогда

$$\boldsymbol{cos\,\alpha} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{c} \cdot \Delta \boldsymbol{t}}{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} \cdot \Delta \boldsymbol{t}}$$

где **α** – угол между направлением разлёта источников и лучом зрения. Окончательно получаем

$$\boldsymbol{\Delta t} = \frac{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}$$

Так как мы одновременно получаем радиоволны от источников, находящихся на расстояниях от квазара $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L_{\square}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} \cdot \Delta \boldsymbol{t}$ соответственно (смотри рисунок), то наблюдаемое отношение угловых расстояний источников от квазара равно отношению этих линейных расстояний

$$\frac{\boldsymbol{L_{\square}}}{\boldsymbol{L}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{2} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}{\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{V}} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}$$

Для $\frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ и **α = 60°** получим

$$\frac{\boldsymbol{L_{\square}}}{\boldsymbol{L}} = \mathbf{2}$$

Ответ: в **2** раза.

Перечень справочных данных.

§1. Основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная G = **$6.672\cdot10^{-11}$ м^3·кг$^{-1}$·с$^{-2}$**
Скорость света в вакууме c = **$2.998\cdot10^{8}$ м/с**
Универсальная газовая постоянная **R = 8.31 м^2·кг·с$^{-2}$·К$^{-1}$·моль$^{-1}$**
Постоянная Стефана-Больцмана σ = **$5.67\cdot10^{-8}$ кг·с$^{-3}$·К$^{-4}$**
Масса протона m_p = **$1.67\cdot10^{-27}$ кг**
Масса электрона m_e = **$9.11\cdot10^{-31}$ кг**
Астрономическая единица **1 а.е. = $1.496\cdot10^{11}$ м**
Парсек **1 пк = 206265 а.е. = $3.086\cdot10^{16}$ м**
Постоянная Хаббла H = **68 (км/с)/Мпк**

§2. Данные о Солнце

Радиус **695 000 км**
Масса **$1.989\cdot10^{30}$ кг**
Светимость **$3.88\cdot10^{26}$ Вт**
Спектральный класс **G2**
Видимая звездная величина **–26.78^m**
Абсолютная болометрическая звездная величина **+4.72^m**
Показатель цвета **(B–V) +0.67^m**
Эффективная температура **5800K**
Средний горизонтальный параллакс **8.794″**
Интегральный поток энергии на расстоянии Земли **1360 Вт/м^2**
Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли **600 Вт/м^2**

§3. Данные о Земле

Эксцентриситет орбиты **0.017**
Тропический год **365.24219 суток**
Средняя орбитальная скорость **29.8 км/с**
Период вращения **23 часа 56 минут 04 секунды**
Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000 года: **23° 26′ 21.45″**
Экваториальный радиус **6378.14 км**
Полярный радиус **6356.77 км**
Масса **$5.974\cdot10^{24}$ кг**
Средняя плотность **5.52 г·см$^{-3}$**
Объемный состав атмосферы: **N_2 (78%), O_2 (21%), Ar (~1%).**

§4. Данные о Луне

Среднее расстояние от Земли **384400 км**
Минимальное расстояние от Земли **356410 км**
Максимальное расстояние от Земли **406700 км**
Эксцентриситет орбиты **0.055**
Наклон плоскости орбиты к эклиптике **5° 09′**
Сидерический (звездный) период обращения **27.321662 суток**
Синодический период обращения **29.530589 суток**
Радиус **1738 км**
Масса **$7.348\cdot10^{22}$ кг** или **1/81.3 массы Земли**
Средняя плотность **3.34 г·см$^{-3}$**

Визуальное геометрическое альбедо **0.12**
Видимая звездная величина в полнолуние **–12.7^m**

§5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометр. альбедо	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли	г·см$^{-3}$		градусы		
Солнце	$1.989\cdot10^{30}$	332946	695000	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	–26.8
Меркурий	$3.302\cdot10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	–0.1
Венера	$4.869\cdot10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут**	177.36	0.65	–4.4
Земля	$5.974\cdot10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419\cdot10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	–2.0
Юпитер	$1.899\cdot10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	–2.7
Сатурн	$5.685\cdot10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4
Уран	$8.683\cdot10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час**	97.86	0.51	5.7
Нептун	$1.024\cdot10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8

* – для наибольшей элонгации внутренних планет и среднего противостояния внешних планет.
** – обратное вращение.

§6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн.км	а.е.		градусы		сут
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

§7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геомет-рич. альбедо	Видимая звездная величина*
	кг	км	г/см^3	км	сут		m
			Земля				
Луна	$7.348\cdot10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	–12.7
			Марс				
Фобос	$1.08\cdot10^{16}$	~10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8\cdot10^{15}$	~6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
			Юпитер				
Ио	$8.94\cdot10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8\cdot10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48\cdot10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08\cdot10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
			Сатурн				
Тефия	$7.55\cdot10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05\cdot10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49\cdot10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35\cdot10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88\cdot10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.2	~11.0
			Уран				
Миранда	$6.33\cdot10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7\cdot10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27\cdot10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49\cdot10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03\cdot10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
			Нептун				
Тритон	$2.14\cdot10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685**	0.7	13.5

* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет.
** – обратное направление вращения.

§8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(\alpha + x) \approx \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha + x) \approx \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + x) \approx \operatorname{tg}\alpha + \frac{x}{\cos^2\alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot x;$$

($x \ll 1$, углы выражаются в радианах).