

*Задачи и решения к муниципальному этапу Всероссийской олимпиады школьников по астрономии 2017-2018 учебного года*

**9 класс**

**Задача № 1.**

Параллакс Канопуса ( $\alpha$  Киля) равен **10,43** угловых миллисекунды. Найдите расстояние до этой звезды в парсеках. Сколько лет займёт полёт до этой звезды, если скорость космического корабля составляет 3% от скорости света?

**Решение.**

Расстояние до звезды можно найти по формуле

$$d[\text{пк}] = \frac{1}{\pi["]}$$

где  $d$  выражено в парсеках, а  $\pi$  – параллакс звезды в угловых секундах. Переведём миллисекунды в секунды и подставим в указанную формулу.

$$d = \frac{1}{0,01043} = 95,88 \text{ пк} \approx 96 \text{ пк}$$

Чтобы найти время полёта в годах, нужно вспомнить, что 1 пк  $\approx$  3,26 светового года, тогда время полёта можно вычислить следующим образом

$$t = \frac{96 \cdot 3,26}{0,03} \approx 10\,432 \text{ года}$$

**Ответ:** примерно **96** пк; около **10 432** лет

**Задача № 2.**

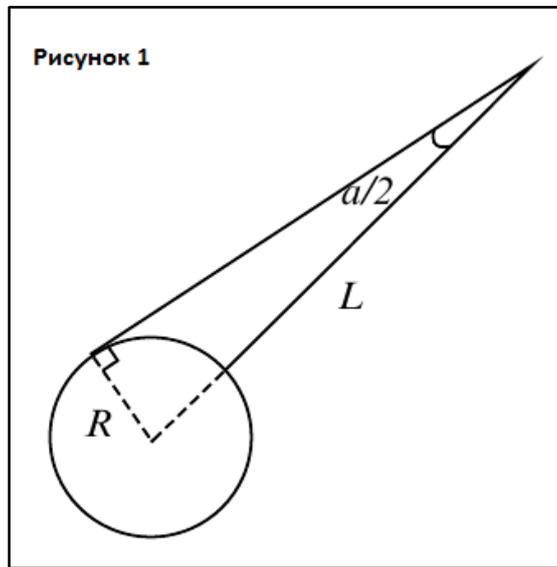
Во сколько раз меняется угловой диаметр Юпитера при наблюдении с Земли? Орбиты Юпитера и Земли считать круговыми.

**Решение.**

Угловой размер Юпитера в произвольный момент времени можно вычислить по формуле

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{L}$$

где  $\alpha$  – угловой диаметр Юпитера,  $R$  – линейный радиус Юпитера, и  $L$  – расстояние от Земли до Юпитера в соответствующий момент (смотри рисунок 1).



Если угол выразить в радианах, то синус малого угла с высокой степенью точности равен самому углу. Так как угловой диаметр Юпитера величина малая, то

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$$

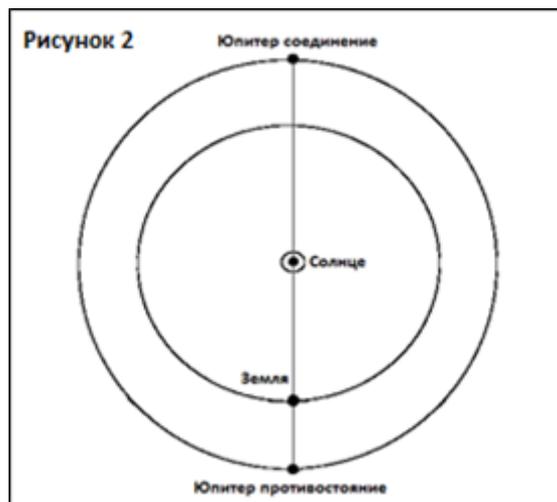
где  $\alpha$  – выражен в радианах. Тогда

$$\alpha \approx \frac{2 \cdot R}{L}$$

Таким образом, отношение максимального и минимального угловых размеров Юпитера

$$\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} \approx \frac{L_{min}}{L_{max}}$$

Максимально возможный угловой размер Юпитер будет иметь в момент противостояния (расстояние Юпитер-Земля наименьшее), а минимально возможный в момент соединения (расстояние Юпитер-Земля наибольшее) (смотри рисунок 2).



Легко видеть, что

$$L_{min} = r_{Юпитер} + r_{Земля}$$

$$L_{max} = r_{\text{Юпитер}} - r_{\text{Земля}}$$

где  $r_{\text{Юпитер}}$  и  $r_{\text{Земля}}$  – радиусы орбит Юпитера и Земли соответственно. Тогда

$$\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} \approx \frac{r_{\text{Юпитер}} + r_{\text{Земля}}}{r_{\text{Юпитер}} - r_{\text{Земля}}}$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} \approx \frac{5,2028 \text{ а. е.} + 1 \text{ а. е.}}{5,2028 \text{ а. е.} - 1 \text{ а. е.}} \approx 1,48$$

**Ответ:** примерно в **1,48** раза

### Задача № 3.

В шаровом звездном скоплении шесть миллионов двести пятьдесят тысяч одинаковых звезд, каждая из которых имеет блеск  $23^m$ . Какова видимая звёздная величина всего скопления?

### Решение.

Световой поток от всего скопления в **6 250 000** раз больше, чем от одной звезды. Представим это число в виде

$$6\,250\,000 = 6,25 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100$$

Разница в световых потоках в **2,5** раза соответствует  $1^m$ , разница в световых потоках в **6,25** = **2,5·2,5** соответствует  $2^m$ , а разница в световых потоках в **100** раз соответствует  $5^m$ . Значит звёздное скопление на **2+5+5+5=17** звёздных величин ярче одной звезды. Тогда суммарный блеск скопления  $21^m - 17^m = 4^m$ .

Тот же результат можно получить, если воспользоваться формулой Погсона

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \lg \frac{I_1}{I_2}$$

Пусть индекс 1 относится ко всему скоплению, а индекс 2 к одной звезде, тогда

$$m_1 - 21^m = -2,5 \cdot \lg \frac{6\,250\,000}{1}$$

Откуда

$$m_1 = 21^m - 17^m = 4^m$$

**Ответ:**  $4^m$

### Задача № 4.

27 октября в Липецке Солнце взошло в 8 часов 10 минут, а в Москве в 8 часов 26 минут. Заход же Солнца в Липецке и в Москве произойдет практически в одно и то же время - в 18 часов 03 минуты. Почему моменты восхода различаются, а моменты захода совпадают?

### Решение.

Разная продолжительность светового дня в Липецке и Москве объясняется тем, что эти города находятся на разных широтах. Москва севернее Липецка, поэтому с конца сентября по начало марта продолжительность дня в Москве меньше.

Далее, хотя Липецк и Москва находятся в одном часовом поясе, но расположены они на разных долготах. Липецк восточнее Москвы, поэтому моменты восхода и захода в Липецке при прочих равных условиях наступают раньше, чем в Москве.

В итоге и первая, и вторая причины сдвигают время восхода в Москве по сравнению с Липецком на более поздний момент времени, а вот относительно времени захода влияние первой и второй причин компенсирует друг друга.

Для большей наглядности оформим сказанное в виде таблицы.

Города	Причины			
	Север-Юг (широты)		Запад-Восток (долготы)	
	Восход	Заход	Восход	Заход
Москва	Позже	Раньше	Позже	Позже
Липецк	Раньше	Позже	Раньше	Раньше

Видно, что для обоих городов в графе «Восход» обе причины усиливают друг друга, а вот в графе «Заход» - компенсируют.

### Задача № 5.

Вычислите максимальную и минимальную высоту верхней кульминации Луны в Липецке. Широта Липецка  $\varphi = 52^{\circ}37'$ .

### Решение.

Плоскость орбиты Луны наклонена к плоскости эклиптики (плоскость земной орбиты) на угол  $i = 5^{\circ}09'$ . В свою очередь, плоскость эклиптики наклонена к плоскости небесного экватора на угол  $\varepsilon = 23^{\circ}26'$ . Поэтому склонение Луны, которое отсчитывается от небесного экватора, колеблется в пределах

$$\delta_{max} = i + \varepsilon$$

$$\delta_{min} = -(i + \varepsilon)$$

Вспоминая формулу для высоты светила в верхней кульминации

$$h = 90^{\circ} - \varphi + \delta$$

где  $\varphi$  – широта места наблюдения, а  $\delta$  – склонение светила. Получаем

$$h_{max} = 90^\circ - \varphi + \delta_{max} = 90^\circ - \varphi + i + \varepsilon$$

$$h_{min} = 90^\circ - \varphi + \delta_{min} = 90^\circ - \varphi - i - \varepsilon$$

Подставляя численные значения получаем

$$h_{max} = 90^\circ - 52^\circ 37' + 5^\circ 09' + 23^\circ 26' = 65^\circ 58'$$

$$h_{min} = 90^\circ - 52^\circ 37' - 5^\circ 09' - 23^\circ 26' = 8^\circ 48'$$

**Ответ:** максимальная  $65^\circ 58'$ ; минимальная  $8^\circ 48'$ .

### Задача № 6.

Спутник, всё время находящийся над одной и той же точкой поверхности Земли называют геостационарным. Оцените время пребывания такого спутника в тени Земли. Считать, что атмосфера у Земли отсутствует.

### Решение.

Так как спутник всё время находится над одной и той же точкой земной поверхности, то его орбита будет круговой и будет располагаться в плоскости экватора Земли. Период обращения такого спутника равен периоду вращения Земли вокруг своей оси.

$$T_{\oplus} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{орбиты}}{v_{спутник}}$$

Круговая скорость спутника вычисляется по формуле

$$v_{спутник} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{R_{орбиты}}}$$

Подставляя это выражение предыдущую формулу и, проведя необходимые преобразования, получим

$$R_{орбиты} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot T_{\oplus}^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

Подставляем численные значения

$$R_{орбиты} = \sqrt[3]{\frac{6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{ кг} \cdot (24 \cdot 3600 \text{ с})^2}{4 \cdot (3,14)^2}} \approx 42\,000 \text{ км}$$

Тот же результат можно получить, используя третий закон Кеплера. В качестве двух тел возьмём спутник и Луну.

$$\left(\frac{T_{\text{Луна}}}{T_{\oplus}}\right)^2 = \left(\frac{a_{\text{Луна}}}{R_{\text{орбиты}}}\right)^3$$

где  $T_{\text{Луна}}$  – период обращения Луны вокруг Земли (в сутках),  $T_{\oplus}$  – период вращения Земли вокруг своей оси (и период обращения спутника) (в сутках),  $a_{\text{Луна}}$  – большая полуось орбиты Луны,  $R_{\text{орбиты}}$  – радиус орбиты спутника.

$$R_{\text{орбиты}} = a_{\text{Луна}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\oplus}}{T_{\text{Луна}}}\right)^2} = 384400 \text{ км} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1 \text{ сут}}{27,3 \text{ сут}}\right)^2} \approx 42000 \text{ км}$$

Для оценки размеров земной тени на полученном расстоянии можно принять, что она имеет форму цилиндра, то есть её размер равен диаметру Земли. Реальная тень, конечно, конус, но на таком расстоянии он весьма незначительно будет отличаться от цилиндра. В качестве обоснованности такого предположения, можно вспомнить полные затмения Луны. То есть размер земной тени на расстоянии, равном радиусу лунной орбиты, больше размеров Луны. Вычисленный радиус геостационарной орбиты примерно в 9 раз меньше расстояния до Луны, поэтому на таком расстоянии «конусообразностью» тени вполне можно пренебречь.

Так как размер земной тени равен

$$d \approx 2 \cdot R_{\oplus} = 2 \cdot 6371 \text{ км} = 12742 \text{ км}$$

то видно, что он мал по сравнению с длиной орбиты спутника

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{орбиты}} \approx 263760 \text{ км}$$

Тогда отрезок орбиты внутри земной тени можно считать отрезком прямой. Если длину орбиты спутник проходит за 24 часа, то отрезок земной тени он пройдёт за

$$t = \frac{d}{L} \cdot 24 \text{ часа} \approx 1,16 \text{ часа}$$

**Ответ:** примерно за **1,16** часа

## Перечень справочных данных.

### §1. Основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная  $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$

Скорость света в вакууме  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

Универсальная газовая постоянная  $R = 8.31 \text{ м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$

Постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$

Масса протона  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

Масса электрона  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$

Астрономическая единица  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$

Парсек  $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$

Постоянная Хаббла  $H = 68 \text{ (км/с)/Мпк}$

### §2. Данные о Солнце

Радиус **695 000 км**

Масса  **$1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$**

Светимость  **$3.88 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$**

Спектральный класс **G2**

Видимая звездная величина  **$-26.78^m$**

Абсолютная болометрическая звездная величина  **$+4.72^m$**

Показатель цвета (B-V)  **$+0.67^m$**

Эффективная температура **5800К**

Средний горизонтальный параллакс  **$8.794''$**

Интегральный поток энергии на расстоянии Земли  **$1360 \text{ Вт/м}^2$**

Поток энергии в видимых лучах на расстоянии Земли  **$600 \text{ Вт/м}^2$**

### §3. Данные о Земле

Эксцентриситет орбиты **0.017**

Тропический год **365.24219 суток**

Средняя орбитальная скорость **29.8 км/с**

Период вращения **23 часа 56 минут 04 секунды**

Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000 года:  **$23^\circ 26' 21.45''$**

Экваториальный радиус **6378.14 км**

Полярный радиус **6356.77 км**

Масса  **$5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$**

Средняя плотность  **$5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$**

Объемный состав атмосферы:  **$\text{N}_2$  (78%),  $\text{O}_2$  (21%), Ar (~1%).**

### §4. Данные о Луне

Среднее расстояние от Земли **384400 км**

Минимальное расстояние от Земли **356410 км**

Максимальное расстояние от Земли **406700 км**

Эксцентриситет орбиты **0.055**

Наклон плоскости орбиты к эклиптике  **$5^\circ 09'$**

Сидерический (звездный) период обращения **27.321662 суток**

Синодический период обращения **29.530589 суток**

Радиус **1738 км**

Масса  **$7.348 \cdot 10^{22} \text{ кг}$**  или **1/81.3 массы Земли**

Средняя плотность  **$3.34 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$**

Визуальное геометрическое альbedo **0.12**

Видимая звездная величина в полнолуние **-12.7<sup>m</sup>**

## §5. Физические характеристики Солнца и планет

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометр. альbedo	Вид. звездная величина*
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695000	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	–26.8
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	–0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут**	177.36	0.65	–4.4
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	–2.0
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	–2.7
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час**	97.86	0.51	5.7
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8

\* – для наибольшей элонгации внутренних планет и среднего противостояния внешних планет.

\*\* – обратное вращение.

## §6. Характеристики орбит планет

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн.км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	–
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

## §7. Характеристики некоторых спутников планет

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альbedo	Видимая звездная величина*
	кг	км	г/см <sup>3</sup>	км	сут		m
<b>Земля</b>							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
<b>Марс</b>							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
<b>Юпитер</b>							
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
<b>Сатурн</b>							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.2	~11.0
<b>Уран</b>							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
<b>Нептун</b>							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685**	0.7	13.5

\* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет.

\*\* – обратное направление вращения.

## §8. Формулы приближенного вычисления

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x;$$

$$\sin(\alpha + x) \approx \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos(\alpha + x) \approx \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + x) \approx \operatorname{tg} \alpha + \frac{x}{\cos^2 \alpha};$$

$$(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot x;$$

( $x \ll 1$ , углы выражаются в радианах).