5 КЛАСС

5.1. В одном городе живут только садоводы и огородники. Огородники всегда правдивы, кроме случаев, когда говорят про морковь. Садоводы также правдивы, кроме случаев, когда говорят про огородников. Однажды два жителя встретились и сказали:

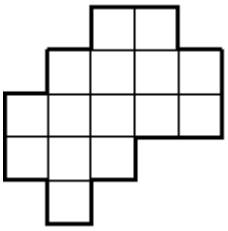
А: Всю свою морковь я засолил.

Б: Ты лжешь.

Определите, садоводом или огородником является каждый из них.

5.2. У Буратино есть 4 монеты, из которых ровно 3 весят одинаково, а 4я весит больше остальных. Какого наименьшего количества взвешиваний на чашечных весах достаточно, чтобы определить отличающуюся по весу от остальных монету (весы сравнивают вес, но не определяют его точно)?

5.3. Разрежьте данную фигуру на три одинаковые части.



5.4. Том Сойер и Гек Финн одновременно прыгнули с плота, двигающегося со скоростью течения реки. Причем Том поплыл по течению, а Гек – против течения. Через 10 мин они развернулись и приплыли обратно к плоту. Кто из них вернулся раньше?

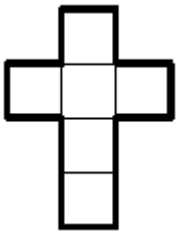
(И Том, и Гек плывут с постоянной собственной (без учёта течения) скоростью, причём их скорости не обязательно равны.)

5.5. Аркаша решил распланировать свое время на неделю вперед. Треть всего времени он отвел на игру в крокет; пятую часть – на учебу в школе; шестую часть всего времени – на просмотр научно-популярных документальных фильмов; сотую часть времени – на подготовку к олимпиаде и треть – на сон. Можно ли так жить? (Нет ли ошибок в рассуждениях Аркаши?)

6 КЛАСС

6.1. В городе живут богатыри, которые всегда говорят правду, и колдуны, которые всегда лгут. Странник повстречал троих жителей города и спросил каждого из них: «Сколько богатырей среди твоих попутчиков?». Ответы были таковы. Первый: «Ни одного». Второй: «Один». Что сказал третий?

6.2. На кубе на каждой грани записали числа от 1 до 6, причем суммы чисел на любых двух противоположных гранях оказались одинаковыми. Затем из этого куба получили развертку, показанную на рисунке, и посчитали суммы чисел в горизонтальной и вертикальной полосах. На какое наименьшее число эти две разности могут отличаться? Каким образом были расположены числа?



6.3. У Буратино есть 4 монеты, из которых ровно 3 весят одинаково, а 4я весит меньше или больше остальных. Какого наименьшего количества взвешиваний на чашечных весах достаточно для того, чтобы определить отличающуюся по весу от остальных монету? (Весы сравнивают вес, но не определяют его точно.)

6.4. Запишите число 217 в виде суммы нескольких положительных слагаемых так, чтобы и произведение этих слагаемых было равно этому числу.

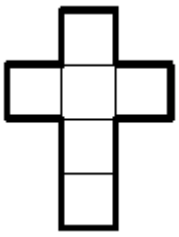
6.5. Из Задонска в Данков выехал грузовик, одновременно с ним из Данкова в Задонск выехала спортивная машина. Через час грузовик оказался ровно посередине между этими городами, а еще через четверть часа они встретились и продолжили свой путь. Сколько времени потратил грузовик на путь из Задонска в Данков? (Скорости грузовика и спортивной машины постоянны.)

7 КЛАСС

7.1. Найдите все такие пары натуральных чисел, что разность их квадратов равна 2017.

7.2. В Хогвартсе на курсе по ясновидению учатся 17 учеников. За день перед экзаменом Дамблдор посадил их за круглый стол и спросил, кто сдаст экзамен. Про себя и двоих своих соседей справа и слева все промолчали, а про всех остальных заявили: "Никто из этих 14 экзамен не сдаст!" По итогам все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько учащихся сдали экзамен?

7.3. На кубе на каждой грани записали числа от 1 до 6, причем суммы чисел на любых двух противоположных гранях оказались одинаковыми. Затем из этого куба получили развертку, показанную на рисунке, и посчитали суммы чисел в горизонтальной и вертикальной полосах. На какое наименьшее число эти две разности могут отличаться? Каким образом были расположены числа?



7.4. Докажите, что, если $a + b + c = 9$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq 27$.

7.5. Корабль «Победа» капитана Врунгеля сел на рифы, и в трюме образовалась течь. Сразу же включили насос, откачивающий воду, но через 10 минут уровень воды в трюме все равно поднялся на 20 см, и в помощь первому насосу включили второй насос той же мощности, и через 5 минут уровень воды понизился на 10 см, что позволило тут же заделать течь. За какое время насосы откачают остаток воды? (Временем ремонта пренебречь)

8 КЛАСС

8.1. Найдите все такие натуральные x и y, что: $x^2 - y^2 = 51$.

8.2. Докажите, что, если $a + b + c = 9$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq 27$.

8.3. У Аркаши есть планшет, который может проработать 6 часов при активном пользовании или 210 часов в режиме ожидания. Когда Аркаша сел в поезд, планшет был полностью заряжен, а в момент, когда он вышел из поезда, планшет полностью разрядился. Сколько времени провел Аркаша в поезде, если известно, что он активно пользовался планшетом ровно половину всего времени поездки?

8.4. В Хогвартсе на курсе по ясновидению 17 учеников. За день перед экзаменом Дамблдор посадил их за круглый стол и спросил, кто сдаст экзамен. Про себя и двоих соседей справа и слева все промолчали, а про всех остальных заявили: "Никто из этих 14 экзамен не сдаст!" По итогам все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько учащихся сдали экзамен?

8.5. В треугольнике ABC: угол B равен $30°$, $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC. Найдите BE.

9 КЛАСС

9.1. Найдите все такие натуральные x и y, что: $x^2 = 14 + y^2$.

9.2. Даша и Аркаша придумали следующую игру. На клетчатой бумаге изображен прямоугольник 5 на 9 клеток. В левом нижнем углу расположена фишка. Даша и Аркаша по очереди сдвигают ее вправо или вверх на произвольное количество клеток, проиграет тот, у кого не останется ходов. Первый ход Аркаша уступил Даше. Кто выигрывает при правильной игре?

9.3. Корнями уравнения $x^2 + bx + c = 0$ являются два действительных числа. Каждый его коэффициент (не исключая коэффициента перед x^2) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трёхчлена также увеличились на 1?

9.4. Точки *A, B, C, D* отмечены на окружности, причем центр *O* окружности лежит внутри четырехугольника ABCD. Доказать, что, если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

9.5. На клетчатом листе бумаги Аркаша изобразил квадрат 8 на 8 клеток, 7 из которых закрашены. Далее Аркаша стал закрашивать только те клетки, которые граничат не менее чем с двумя другими, уже закрашенными. Докажите, что Аркаша не сможет закрасить весь квадрат.

10 КЛАСС

10.1. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет одним из своих корней $x = 1 + \sqrt{2}$. Найдите a и b, если известно, что они рациональны.

10.2. Найдите все пары целых чисел a и b, что: $2017(a + b) = ab$.

10.3. Докажите, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство $10x^3 + 4 \geq 9x^2$.

10.4. Любые два города в некотором государстве соединены либо воздушным, либо железнодорожным транспортом. Аркаша страдает аэрофобией и никогда не летает, а Даша очень не любит поезда и предпочитает передвигаться только самолетами. Докажите, что кто-то из них сможет проложить маршрут между любыми двумя городами данной страны.

10.5. Даша и Аркаша придумали следующую игру. Ходят по очереди. Даша, ходя первой, называет два числа, которые являются концами какого-то отрезка. Аркаша называет два других числа, являющихся концами отрезка, вложенного в предыдущий. Таким образом они ходят бесконечное количество раз. Даша выиграет, если в пересечении всех задействованных отрезков будет хотя бы одно рациональное число, а Аркаша хочет ей помешать. Кто выигрывает?

11 КЛАСС

11.1. Даша и Аркаша нарисовали на листе бумаги несколько прямых и окружностей, разделив ими плоскость листа на несколько частей. В распоряжении Даши и Аркаши – карандаши двух цветов. Докажите, что они могут раскрасить получившиеся части в два цвета так, что никакие граничащие по ребру части не будут окрашены в один цвет.

11.2. Докажите, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство

$$9x^4 - 8x^2 + 3 \geq 0.$$

11.3. Любые два города в некотором государстве соединены либо воздушным, либо железнодорожным транспортом. Аркаша страдает аэрофобией и никогда не летает, а Даша очень не любит поезда и предпочитает передвигаться только самолетами. Докажите, что кто-то из них сможет проложить маршрут между любыми двумя городами данной страны.

11.4. Через вершины квадрата $ABCD$ проведена окружность. Точка M принадлежит дуге BC, прямая AM и DM пересекают BD и DM соответственно в точках P и Q. Докажите, что площадь квадрата ABCD в два раза больше площади четырёхугольника $APQD$.

11.5. На доске записано некоторое количество чисел. Аркаша за один ход заменяет любые два из них (одновременно не равные нулю), скажем, x и y, на числа $x - y/2$ и $y + x/2$. Может ли Аркаша в итоге получить на доске исходные числа?