5 КЛАСС

5.1. В одном городе живут только садоводы и огородники. Огородники всегда правдивы, кроме случаев, когда говорят про морковь. Садоводы также правдивы, кроме случаев, когда говорят про огородников. Однажды два жителя встретились и сказали:

А: Всю свою морковь я засолил.

Б: Ты лжешь.

Определите, садоводом или огородником является каждый из них.

Ответ. Оба огородники.

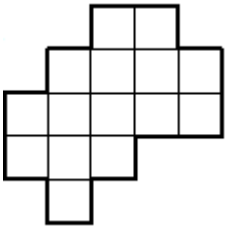
Решение. Предположим, что А садовод. Тогда он сказал правду, а Б солгал. Но ни огородники, ни садоводы не лгут, говоря про садоводов. Значит, А огородник. Говоря про морковь, он солгал. Поэтому Б сказал про А правду. Это мог сделать только огородник.

5.2. У Буратино есть 4 монеты, из которых ровно 3 весят одинаково, а 4я весит больше остальных. Какого наименьшего количества взвешиваний на чашечных весах достаточно, чтобы определить отличающуюся по весу от остальных монету (весы сравнивают вес, но не определяют его точно)?

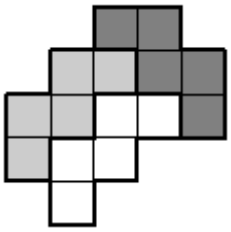
Ответ. Достаточно двух взвешиваний.

Решение. Взвесим монеты парами. Одна из чаш перевесит, значит, там – искомая монета. Вторым взвешиванием определим ее.

5.3. Разрежьте данную фигуру на три одинаковые части.



Ответ.



5.4. Том Сойер и Гек Финн одновременно прыгнули с плота, двигающегося со скоростью течения реки. Причем Том поплыл по течению, а Гек – против течения. Через 10 мин они развернулись и приплыли обратно к плоту. Кто из них вернулся раньше?

(И Том, и Гек плывут с постоянной собственной (без учёта течения) скоростью, причём их скорости не обязательно равны.)

Ответ. Пловцы вернулись одновременно.

Решение. Относительно плота каждый пловец всегда плывет со своей собственной скоростью (независимо от того, по или против течения он плывет). По условию каждый пловец плыл 5 минут, удаляясь от плота. Значит, ему потребуется ещё 5 минут, чтобы возвратиться обратно.

5.5. Аркаша решил распланировать свое время на неделю вперед. Треть всего времени он отвел на игру в крокет; пятую часть – на учебу в школе; шестую часть всего времени – на просмотр научно-популярных документальных фильмов; сотую часть времени – на подготовку к олимпиаде и треть – на сон. Можно ли так жить? (Нет ли ошибок в рассуждениях Аркаши?)

Ответ. Так жить нельзя.

Решение. Поскольку $^1/_5 + {}^1/_6 > {}^1/_3$, то сумма всех данных дробей больше 1, что противоречит здравому смыслу.

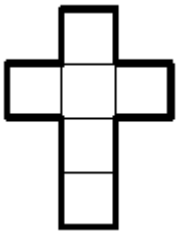
6 КЛАСС

6.1. В городе живут богатыри, которые всегда говорят правду, и колдуны, которые всегда лгут. Странник повстречал троих жителей города и спросил каждого из них: «Сколько богатырей среди твоих попутчиков?». Ответы были таковы. Первый: «Ни одного». Второй: «Один». Что сказал третий?

Ответ. «Один».

Решение. Предположим, что первый — богатырь, тогда оба остальных колдуны, но тогда получается, что второй сказал правду, значит первый — солгал. Теперь второй. Предположим, что он солгал, тогда третий обязательно богатырь, и получается, что второй сказал правду. Значит второй — богатырь. А это, в свою очередь, означает, что третий — тоже богатырь, и он сказал «Один».

6.2. На кубе на каждой грани записали числа от 1 до 6, причем суммы чисел на любых двух противоположных гранях оказались одинаковыми. Затем из этого куба получили развертку, показанную на рисунке, и посчитали суммы чисел в горизонтальной и вертикальной полосах. На какое наименьшее число эти две разности могут отличаться? Каким образом были расположены числа?



Решение. Заметим, что в указанной развёртке противоположными гранями являются крайние по горизонтали, а также первая и третья сверху по вертикали. Поэтому, независимо от расположения чисел на развёртке, разностью между суммами по вертикали и по горизонтали является число, записанное в нижнем квадрате. Следовательно, Васе надо разрезать кубик так, чтобы в этом квадрате была записана цифра 1. В этом случае на пересечении полос будет цифра 6, одна из пар (2, 5) и (3, 4) окажется на горизонтали, а другая – на вертикали, например, так, как показано на рисунке.

6.3. У Буратино есть 4 монеты, из которых ровно 3 весят одинаково, а 4я весит меньше или больше остальных. Какого наименьшего количества взвешиваний на чашечных весах достаточно для того, чтобы определить отличающуюся по весу от остальных монету? (Весы сравнивают вес, но не определяют его точно.)

Решение. Сначала следует сравнить 1-ую и 2-ую монеты, затем 1-ую и 3-ю.

Если все три – одинакового веса, то 4я – искомая.

Если в двух взвешиваниях одна чаша перевесила (например, при первом взвешивании, а при втором – весы в равновесии), то искомая – 2я (если наоборот – то 3я).

Если же в двух взвешиваниях какая-то чаша перевесила – то искомая – 1я.

6.4. Запишите число 217 в виде суммы нескольких положительных слагаемых так, чтобы и произведение этих слагаемых было равно этому числу.

Ответ. $\mathbf{217 = 7 \cdot 31 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 7 + 29 + 1 + 1 + \ldots + 1}$ (единицы встречаются по 167 раз).

Решение. Разложим число 217 на множители и получим: $\mathbf{217 = 7 \cdot 31}$. Значит, в нашем случае все остальные сомножители должны быть представлены единицами. Поскольку сумма всех этих сомножителей также будет 217, то в произведении должно быть

$\mathbf{217 - (7 + 31) = 179}$ единиц:

$$217 = 7 * 31 * 1 * \ldots * 1 = 7 + 29 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

6.5. Из Задонска в Данков выехал грузовик, одновременно с ним из Данкова в Задонск выехала спортивная машина. Через час грузовик оказался ровно посередине между этими городами, а еще через четверть часа они встретились и продолжили свой путь. Сколько времени потратил грузовик на путь из Задонска в Данков? (Скорости грузовика и спортивной машины постоянны.)

Ответ. 5 часов.

Решение. Пусть через час после начала движения грузовик оказался в точке C, а спортивная машина в точке D. Тогда отрезок AC равен отрезку CD. Пусть через 15 минут они встретились в точке E. На путь AC грузовик потратил 60 минут, значит, на путь CD он также потратил 60 минут. Тогда путь ED занял у грузовика 60 – 15 = 45 минут, а у спортивной машины – 15 минут. Следовательно, скорость грузовика в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Путь BD спортивная машина проехала за час, значит, у грузовика этот путь занял 3 часа. На путь AD грузовик потратил 2 часа, то есть на всю дорогу ему потребовалось 5 часов.

7 КЛАСС

7.1. Найдите все такие пары натуральных чисел, что разность их квадратов равна 2017.

Ответ. (1009;1008).

Решение. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

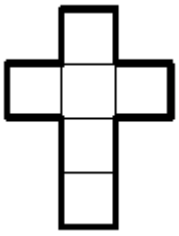
Так как произведение равно простому числу 2017, то больший множитель равен 2017, а меньший – 1. Итак, $x - y = 1$, $x + y = 2017$, откуда $x = 1009$, $y = 1008$.

7.2. В Хогвартсе на курсе по ясновидению учатся 17 учеников. За день перед экзаменом Дамблдор посадил их за круглый стол и спросил, кто сдаст экзамен. Про себя и двоих своих соседей справа и слева все промолчали, а про всех остальных заявили: "Никто из этих 14 экзамен не сдаст!" По итогам все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько учащихся сдали экзамен?

Ответ. Два ученика.

Решение. Предположим, что никто не сдаст экзамен. Тогда высказывание каждого ученика истинно. В этом случае все должны были сдать экзамен – противоречие. Значит, хотя бы один из учеников сдал экзамен. Он сказал правду, поэтому никто, кроме его соседей, экзамен не сдаст. Если оба соседа также остались без дипломов, то утверждение "Никто из этих 14 не получит!" для каждого из них истинно, но ведь они должны были ошибиться! Если же оба соседа сдали экзамен, то они оба ошиблись в своих высказываниях. Значит, только один из соседей мог сдать экзамен успешно. Действительно, в этом случае его высказывание истинно, а высказывание второго соседа – ложно.

7.3. На кубе на каждой грани записали числа от 1 до 6, причем суммы чисел на любых двух противоположных гранях оказались одинаковыми. Затем из этого куба получили развертку, показанную на рисунке, и посчитали суммы чисел в горизонтальной и вертикальной полосах. На какое наименьшее число эти две разности могут отличаться? Каким образом были расположены числа?



Решение. Заметим, что в указанной развёртке противоположными гранями являются крайние по горизонтали, а также первая и третья сверху по вертикали. Поэтому, независимо от расположения чисел на развёртке, разностью между суммами по вертикали и по горизонтали является число, записанное в нижнем квадрате. Следовательно, Васе надо разрезать кубик так, чтобы в этом квадрате была записана цифра 1. В этом случае на пересечении полос будет цифра 6, одна из пар (2, 5) и (3, 4) окажется на горизонтали, а другая – на вертикали, например, так, как показано на рисунке.

7.4. Докажите, что, если $a + b + c = 9$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq 27$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a + b + c = 9}$. Тогда

$$81 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leq$$
$$\leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

При переходе к неравенству использовался факт, что

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

7.5. Корабль «Победа» капитана Врунгеля сел на рифы, и в трюме образовалась течь. Сразу же включили насос, откачивающий воду, но через 10 минут уровень воды в трюме все равно поднялся на 20 см, и в помощь первому насосу включили второй насос той же мощности, и через 5 минут уровень воды понизился на 10 см, что позволило тут же заделать течь. За какое время насосы откачают остаток воды? (Временем ремонта пренебречь)

Ответ. За $5/4$ минуты.

Решение. Уровень воды при одном включённом насосе и течи поднимался на 2 см/мин, а при включённых двух и течи – опускался на 2 см/мин. Значит, один насос откачивает 4 см/мин, а два насоса – 8 см/мин. $10 : 8 = 5/4$ (мин) – время, за которое два насоса откачают остаток воды.

8 КЛАСС

8.1. Найдите все такие натуральные x и y, что: $x^2 - y^2 = 51$.

Ответ. (26, 25), (10, 7).

Решение.

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

$51 = 17 \cdot 3 = 1 \cdot 51.$

Имеем два случая.

1) $x - y = 1$, $x + y = 51$, откуда $x = 26$, $y = 25$.

2) $x - y = 3$, $x + y = 17$, откуда $x = 10$, $y = 7$.

8.2. Докажите, что, если $a + b + c = 9$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq 27$.

Решение

Пусть $a + b + c = 9$. Тогда

$$81 = (a + b + c)2 = a2 + b2 + c2 + 2ab + 2bc + 2ca \leq$$
$$\leq 3(a2 + b2 + c2)$$

(при переходе к неравенству использовался факт, что

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

8.3. У Аркаши есть планшет, который может проработать 6 часов при активном пользовании или 210 часов в режиме ожидания. Когда Аркаша сел в поезд, планшет был полностью заряжен, а в момент, когда он вышел из поезда, планшет полностью разрядился. Сколько времени провел Аркаша в поезде, если известно, что он активно пользовался планшетом ровно половину всего времени поездки?

Ответ. 11 часов 40 минут.

Решение. Первый способ. За час разговора и час ожидания расходуется

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{210} = \frac{6}{35}$$

заряда. Значит, Аркаша ехал $2 \cdot \frac{35}{6} = \frac{35}{3}$ часа, то есть $11\frac{2}{3}$ часа.

Второй способ. Если бы Аркаша говорил 210·6 часов и молчал 210·6 часов, то планшет бы полностью разрядился 210 + 6 = 216 раз. Так как на самом деле планшет разрядился один раз, Аркаша пользовался им $210 \cdot 6 : 216 = \frac{35}{6}$ часа и не пользовался столько же, то есть ехал он $\frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$ часа.

8.4. В Хогвартсе на курсе по ясновидению 17 учеников. За день перед экзаменом Дамблдор посадил их за круглый стол и спросил, кто сдаст экзамен. Про себя и двоих соседей справа и слева все промолчали, а про всех остальных заявили: "Никто из этих 14 экзамен не сдаст!" По итогам все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько учащихся сдали экзамен?

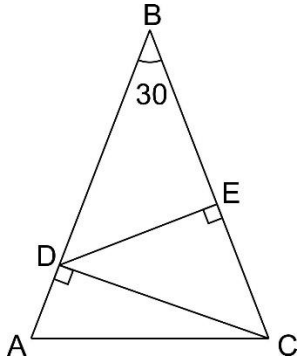
Ответ. Два ученика.

Решение. Предположим, что никто не сдаст экзамен. Тогда высказывание каждого ученика истинно. В этом случае все должны были сдать экзамен – противоречие. Значит, хотя бы один из учеников сдал экзамен. Он сказал правду, поэтому никто, кроме его соседей, экзамен не сдаст. Если оба соседа также остались без дипломов, то утверждение "Никто из этих 14 не получит!" для каждого из них истинно, но ведь они должны были ошибиться! Если же оба соседа сдали экзамен, то они оба ошиблись в своих высказываниях. Значит, только один из соседей мог сдать экзамен успешно. Действительно, в этом случае его высказывание истинно, а высказывание второго соседа – ложно.

8.5. В треугольнике ABC: угол B равен $30°$, $AB = BC = 6$. Проведены высота CD треугольника ABC и высота DE треугольника BDC. Найдите BE.

Ответ. 4,5.

Решение. $DC = ½\,BC = 3$ (см. рис.). Кроме того, $\angle DCB = 90° - \angle DBC = 60°$, следовательно, $CE = ½\,DC = 1{,}5$. Таким образом, $BE = BC - CE = 4{,}5$.



9 КЛАСС

9.1. Найдите все такие натуральные x и y, что: $x^2 = 14 + y^2$.

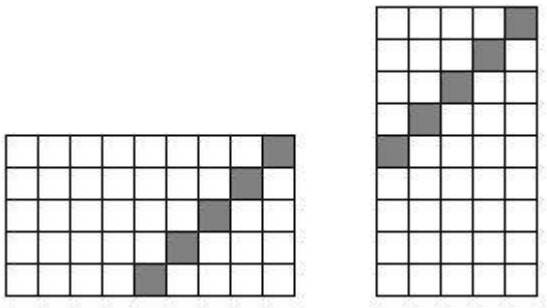
Ответ. Решений нет.

Решение. $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = 14$. Числа $x - y$ и $x + y$ одной чётности, поэтому их произведение либо нечётно, либо кратно 4. Противоречие.

9.2. Даша и Аркаша придумали следующую игру. На клетчатой бумаге изображен прямоугольник 5 на 9 клеток. В левом нижнем углу расположена фишка. Даша и Аркаша по очереди сдвигают ее вправо или вверх на произвольное количество клеток, проиграет тот, у кого не останется ходов. Первый ход Аркаша уступил Даше. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает Даша.

Решение. Каждым своим ходом Даша ставит фишку на одну из клеток отмеченной диагонали (см. рисунок). Сережа своим ходом ее оттуда убирает. Поскольку они ходят только вправо или вверх, то когда-нибудь игра закончится.



Задачу можно также решать с конца при помощи анализа выигрышных и проигрышных позиций.

9.3. Корнями уравнения $x^2 + bx + c = 0$ являются два действительных числа. Каждый его коэффициент (не исключая коэффициента перед x^2) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трёхчлена также увеличились на 1?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что это произошло. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$. Тогда

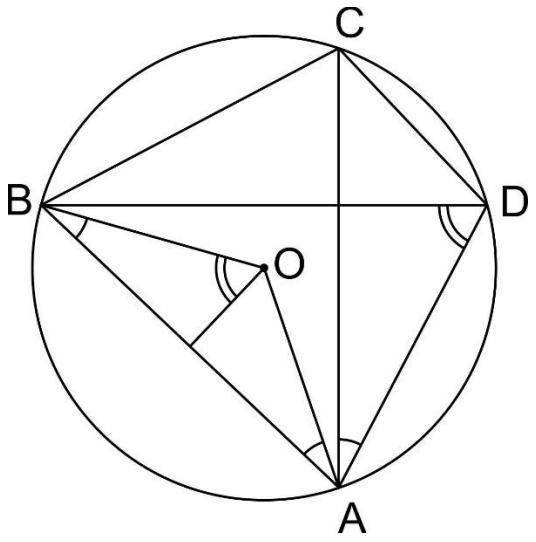
$x_1 + x_2 = - b$, $x_1x_2 = c$,

$x_1 + x_2 + 2 = - b + 1/2,\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) = c + 1/2.$

Отсюда $b = 5,\ c = 9.$ Стало быть, искомый трёхчлен, имеет вид $x^2 + 5x + 9.$ Однако дискриминант этого трёхчлена отрицателен. Противоречие.

9.4. Точки A, B, C, D отмечены на окружности, причем центр O окружности лежит внутри четырехугольника ABCD. Доказать, что, если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

Решение. Так как
$\angle BAO = ½\,(\pi - \angle AOB) = \pi/2 - \angle ADB,$ то $\angle DAC + \angle ADB = \pi/2,$ что равносильно утверждению задачи (см. рис.).



9.5. На клетчатом листе бумаги Аркаша изобразил квадрат 8 на 8 клеток, 7 из которых закрашены. Далее Аркаша стал закрашивать только те клетки, которые граничат не менее чем с двумя другими, уже закрашенными. Докажите, что Аркаша не сможет закрасить весь квадрат.

Решение. Рассмотрим границу закрашенной области (т.е. все отрезки длиной 1 между узлами, по одну сторону от которых бурьян, а по другую - нет). Вначале длина границы была не более $\mathbf{7 \cdot 4 = 28}$. Нетрудно заметить, что при окрашивании граница не может увеличиваться. Но если бы все поле 8 на 8 в некоторый момент оказалось окрашенным, то длина границы стала бы равной 8*4=32, что противоречит соображениям, приведенным выше.

10 КЛАСС

10.1. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет одним из своих корней $x = 1 + \sqrt{2}$. Найдите a и b, если известно, что они рациональны.

Ответ. $a = b = -2$.

Решение. Подставляя в уравнение $\boldsymbol{x = 1 + \sqrt{2}}$, приходим к равенству

$$(4 + a + b) + (a + 2)\sqrt{2} = 0.$$

Так как $\sqrt{2}$ – иррациональное число, то такое равенство возможно лишь в случае, когда $4 + a + b = 0$ и $a + 2 = 0$.

10.2. Найдите все пары целых чисел a и b, что: $2017(a + b) = ab$.

Ответ. $(2016; -2017^2 + 2017), (2018; 2017^2 + 2017), (0; 0)$, $(4034; 4034), (-2017^2 + 2017; 2016), (2017^2 + 2017; 2018)$.

Решение. $2017(a + b) = ab$

$$0 = ab - 2017a - 2017b$$

$$2017^2 = ab - 2017a - 2017b + 2017^2$$

$$2017^2 = (2017 - x)(2017 - y)$$

2017 – простое, поэтому 2017^2 имеет делители: $d = \pm 1;\ \pm 2017;\ \pm 2017^2$. Составим 6 систем вида:

$$\begin{cases} 2017 - x = d, \\ 2017 - y = \dfrac{2017^2}{d}. \end{cases}$$

В результате получаем пары:

$$(2016; -2017^2 + 2017), (2018; 2017^2 + 2017), (0; 0), (4034; 4034),$$
$$(-2017^2 + 2017; 2016), (2017^2 + 2017; 2018).$$

10.3. Докажите, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство $10x^3 + 4 \geq 9x^2$.

Решение. Используем неравенство Коши:

$$10x^3 + 3 = 9x^3 + x^3 + 3 \geq 3\sqrt[3]{9x^3 \cdot x^3 \cdot 3} = 9x^2.$$

10.4. Любые два города в некотором государстве соединены либо воздушным, либо железнодорожным транспортом. Аркаша страдает аэрофобией и никогда не летает, а Даша очень не любит поезда и предпочитает передвигаться только самолетами. Докажите, что кто-то из них сможет проложить маршрут между любыми двумя городами данной страны.

Решение. Пусть из некоторого города A нельзя попасть в некоторый город B по железной дороге. Рассмотрим множество M всех городов, в которые можно попасть из города A по железной дороге. Множество городов, не входящих в M, обозначим N. Множество N непусто, поскольку в нем содержится город B. Ясно, что из городов множества M нельзя попасть в города множества N по железной дороге.

Докажем, что из каждого города в любой другой можно попасть авиарейсами.

Если один из городов принадлежит M, а другой – множеству N, то между ними есть прямая авиалиния.

Пусть два города принадлежат M. Тогда из первого города можно попасть авиарейсом в некоторый город множества N, а оттуда (также самолётом) – во второй город. Аналогично рассматривается случай, когда оба города принадлежат N.

10.5. Даша и Аркаша придумали следующую игру. Ходят по очереди. Даша, ходя первой, называет два числа, которые являются концами какого-то отрезка. Аркаша называет два других числа, являющихся концами отрезка, вложенного в предыдущий. Таким образом они ходят бесконечное количество раз. Даша выиграет, если в пересечении всех задействованных отрезков будет хотя бы одно рациональное число, а Аркаша хочет ей помешать. Кто выигрывает?

Ответ. Выигрывает второй игрок.

Решение. Выигрышная стратегия второго такова. Первым своим ходом он выбирает свой отрезок так, чтобы в нем не было ни одной целой точки. Вторым своим ходом он выбирает свой отрезок так, чтобы в нем не было ни одной точки вида $m/2$, где m – целое число. Действуя так и дальше, на n-м ходу он выбирает свой отрезок так, чтобы в нем не было ни одной точки вида m/n, где m – целое. Заметим, что при любой игре первого второй может выбирать отрезки согласно изложенным выше правилам.

Пусть рациональное число p/q (для некоторого целого p и натурального q) лежит в пересечении всех отрезков. Но это противоречит тому, что второй игрок на своем q-м ходу назвал отрезок, не содержащий рациональных чисел, представимых в виде дроби со знаменателем q.

11 КЛАСС

11.1. Даша и Аркаша нарисовали на листе бумаги несколько прямых и окружностей, разделив ими плоскость листа на несколько частей. В распоряжении Даши и Аркаши – карандаши двух цветов. Докажите, что они могут раскрасить получившиеся части в два цвета так, что никакие граничащие по ребру части не будут окрашены в один цвет.

Решение. Доказательство проведем индукцией по общему числу прямых и окружностей. Для одной прямой или окружности утверждение очевидно. Предположим теперь, что можно раскрасить требуемым образом любую карту, заданную n прямыми и окружностями, и покажем, как тогда раскрасить карту, заданную $n+1$ прямыми и окружностями. Выбросим одну из этих прямых (или окружностей) и раскрасим карту, заданную оставшимися n прямыми и окружностями. Затем цвета всех частей, лежащих по одну сторону от выброшенной прямой (или окружности), сохраним, а цвета всех частей, лежащих по другую сторону, заменим на противоположные.

11.2. Докажите, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство

$$9x^4 - 8x^2 + 3 \geq 0.$$

Решение. Используем неравенство Коши:

$$9x^4 + 3 = 8x^4 + x^4 + 2 + 1 \geq 4\sqrt[4]{8x^4 \cdot x^4 \cdot 2 \cdot 1} = 8x^2.$$

11.3. Любые два города в некотором государстве соединены либо воздушным, либо железнодорожным транспортом. Аркаша страдает аэрофобией и никогда не летает, а Даша очень не любит поезда и предпочитает передвигаться только самолетами. Докажите, что кто-то из них сможет проложить маршрут между любыми двумя городами данной страны.

Решение. Пусть из некоторого города A нельзя попасть в некоторый город B по железной дороге. Рассмотрим множество M всех городов, в которые можно попасть из города A по железной дороге. Множество городов, не входящих в M, обозначим N. Множество N непусто, поскольку в нем содержится город B. Ясно, что из городов множества M нельзя попасть в города множества N по железной дороге. Докажем, что из каждого города в любой другой можно попасть авиарейсами.

Если один из городов принадлежит M, а другой – множеству N, то между ними есть прямая авиалиния.

Пусть два города принадлежат M. Тогда из первого города можно попасть авиарейсом в некоторый город множества N, а оттуда (также самолётом) – во второй город. Аналогично рассматривается случай, когда оба города принадлежат N.

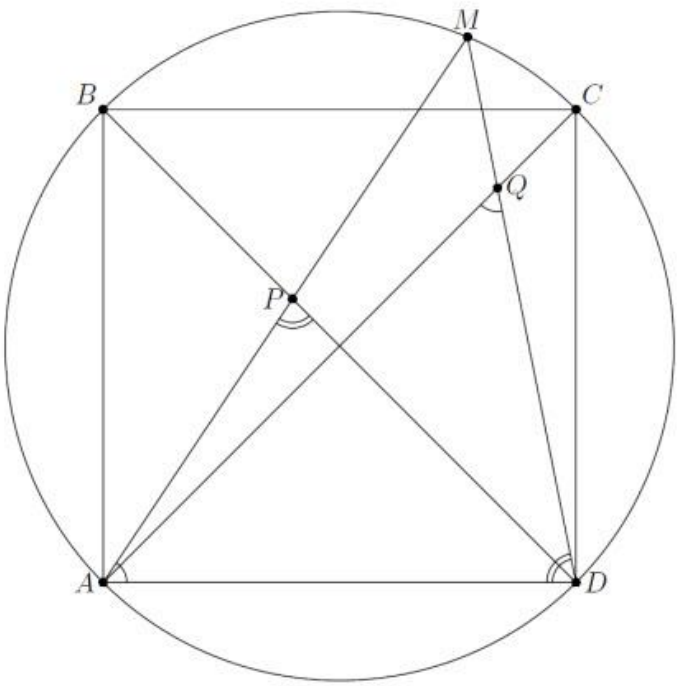
11.4. Через вершины квадрата *ABCD* проведена окружность. Точка *M* принадлежит дуге *BC*, прямая *AM* и *DM* пересекают *BD* и AC соответственно в точках *P* и *Q*. Докажите, что площадь квадрата ABCD в два раза больше площади четырёхугольника *APQD*.

Решение. Так как

$\angle AMD = \angle ABD = 45° = \angle QAD,$ то $\angle AQD = \angle AMD + \angle MAQ = \angle PAD.$

Аналогично $\angle APD = \angle ADQ$ (см. рис.). Следовательно, треугольники *APD* и *QDA* подобны, то есть

$$2S_{APQD} = AQ \cdot PD = AD^2 = S_{ABCD}.$$



11.5. На доске записано некоторое количество чисел. Аркаша за один ход заменяет любые два из них (одновременно не равные нулю), скажем, x и y, на числа $x - y/2$ и $y + x/2$. Может ли Аркаша в итоге получить на доске исходные числа?

Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим сумму квадратов чисел, выписанных на доске, и покажем, что эта сумма увеличивается. Этим будет обоснован отрицательный ответ на вопрос задачи. Возьмем сумму квадратов чисел $\boldsymbol{x - y/2}$ и $\boldsymbol{y + x/2}$, на которые были заменены числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 = (x^2 - xy + y^2/4) + (y^2 + xy + x^2/4)$$
$$= 5/4(x^2 + y^2)$$

Поскольку согласно условию числа x и y одновременно не равны нулю, сумма квадратов чисел $x - y/2$ и $y + x/2$ больше суммы квадратов чисел x и y. Итак, при каждой операции сумма квадратов чисел возрастает.