

11 класс

№1. Пружина и два груза.

К концу висящей вертикально пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой m . Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают еще один груз такой же массы. Определить длину растянутой пружины. Жесткость пружины равна k , а ее длина в нерастянутом состоянии l_0 .

Решение и критерии оценивания:

При подвешивании первого груза пружина удлинится на величину:

$$\Delta L = mg/k \text{ (2 балла),}$$

т.е. каждая половина пружины удлинится на:

$$\Delta l = mg/(2k) \text{ (2 балла).}$$

При подвешивании второго груза длина нижней половины пружины не меняется. Удлинение же верхней половины пружины увеличивается вдвое и становится равным $\Delta l = 2mg/(2k)$, так как сила натяжения этой части пружины возрастает в два раза (3 балла).

Удлинение всей пружины, таким образом, станет равным:

$$mg/(2k) + mg/k = 1.5mg/k \text{ (2 балла),}$$

а длина пружины будет:

$$l_0 + 1.5mg/k \text{ (1 балл).}$$

Ответ: $l_0 + \frac{3}{2} \frac{mg}{k}$.

№2. Массивная цепочка

На абсолютно гладком столе лежит цепочка, свешивающаяся наполовину за край стола. Как изменится время ее соскальзывания, если к концам цепочки прикрепить две одинаковые массы?

Решение и критерии оценивания

Пусть в некоторый момент со стола свисает часть цепочки длиной x , причем для простоты положим, что в начальный момент $x = l/2$, где l – длина всей цепочки. Тогда сила, приводящая цепочку в движение, будет пропорциональна весу свисающей части, т.е. m_0gx (1 балл),

где m_0 – масса единицы длины цепочки. Ускорение движения будет равно m_0gx/m (1 балл), где m – масса цепочки. В начальный момент, когда $m_0x =$

$m/2$, ускорение равно $g/2$, а затем оно возрастает, так что движение цепочки неравномерно ускоренное (1 балл).

Если к концам цепочки прикрепить одинаковые массы M , то движущей силой будет $m_0gx + Mg = (m_0x + M)g$ (1 балл),

а ускорение цепочки в некоторый момент $(m_0x + M)g / (m + 2M)$ (1 балл).

Для решения вопроса о том, в каком случае цепочка соскользнет быстрее, нужно выяснить, в каком случае ускорение быстрее нарастает. Для этого надо сравнить два выражения: m_0gx/m и $(m_0x + M)g / (m + 2M)$. Чтобы сравнить эти две дроби, приведем их к одному знаменателю и сравним числители. Числитель первой дроби будет: $(m_0gxm + 2m_0gxM)$, числитель второй дроби – $(m_0gxm + Mmg)$ (2 балла).

Видно, что эти числители равны между собой в начальный момент, когда $(m_0x = m/2)$. В последующие моменты ускорение в первом случае всегда больше, чем во втором случае (2 балла).

Итак, цепочка соскользнет быстрее, когда дополнительных масс на ее концах не будет (1 балл).

Ответ: цепочка соскользнет быстрее, когда масс на ее концах не будет.

№3. Метод размерностей.

Эксперименты показали, что скорость звука в газах зависит от давления и плотности среды. Сравните скорости звука в газе для двух состояний $(p_1, \rho_1); (p_2, \rho_2)$.

Решение:

Давление может быть выражено как функция плотности (концентрации) и температуры среды.

Скорость звука в условиях данной задачи может быть представлена

$$v = k \cdot p^a \cdot \rho^b, \quad (1)$$

$$[v] = L \cdot T^{-1}; [p] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}; [\rho] = M \cdot L^{-3}. \quad (1')$$

Соотношение (1) перепишем как

$$\begin{aligned} L \cdot T^{-1} &= [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}]^a \cdot [M \cdot L^{-3}]^b, \\ L \cdot T^{-1} &= [M]^{a+b} \cdot [L]^{-a-3b} \cdot [T]^{-2a}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) имеем

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ -a - 3b = 1, \\ -2a = -1. \end{cases} \quad (3)$$

$$a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}.$$

Решение (3) дает

Результаты экспериментов имеют следующую функциональную зависимость:

$$v = k \cdot \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (4)$$

Скорость звука для двух состояний имеет вид:

$$v_1 = k \cdot \sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}}; \quad v_2 = k \cdot \sqrt{\frac{p_2}{\rho_2}} \quad (5)$$

Из (5) получим отношение скоростей

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 \cdot p_2}} \quad (6)$$

Критерии оценивания:

Указана функциональная зависимость через неизвестные степени. – 2 балла.

Указаны размерности необходимых величин – 1 балл.

Записано выражение (2) – 1 балл.

Получена система уравнений (3) – 2 балла.

Решена система (3) – 2 балла.

Записаны выражения для двух состояний – 1 балл.

Получен ответ (6) – 1 балл.

№4. Неизвестный газ.

Для нагревания 1 кг неизвестного газа на 1 К при постоянном давлении требуется 912 Дж, а для нагревания при постоянном объеме – 649 Дж. Что это за газ?

Решение и критерии оценивания:

Когда газ нагревается при постоянном объеме, затрачиваемая энергия идет только на изменение внутренней энергии газа, а при нагревании при постоянном давлении – еще и на совершение работы. Закон сохранения энергии для этих двух случаев запишется так:

$$m c_v \Delta t = \Delta U \quad (2 \text{ балла}),$$

$$m c_p \Delta t = \Delta U + A \quad (2 \text{ балла}),$$

где

c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, Δt – изменение температуры, ΔU – изменение внутренней энергии газа, m – масса газа и $A = p \Delta V$ (1 балл) – совершенная при расширении газа работа (ΔV – изменение объема, p – давление).

Так как при одинаковом изменении температуры газа изменение его внутренней энергии одинаково независимо от того, происходит ли это нагревание при постоянном объеме или при постоянном давлении, то можно записать:

$$m c_p \Delta t = m c_v \Delta t + p \Delta V \quad (1 \text{ балл}). \quad (1)$$

Пользуясь уравнением газового состояния, можно совершенную газом работу выразить через массу газа m и газовую постоянную R :

$$A = p\Delta V = (m/M)R\Delta t \quad (1 \text{ балл}).$$

Подставив это выражение в уравнение (1), получим:

$$c_p = c_v + R/M \quad (1 \text{ балл}),$$

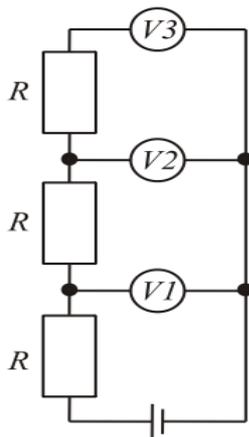
откуда:

$$M = R/(c_p - c_v) \approx 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \quad (1 \text{ балл}).$$

Неизвестный газ – кислород (1 балл).

Ответ: кислород.

№5. Три вольтметра

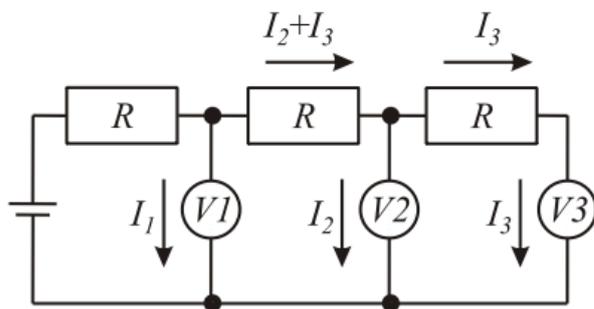


Цепь, показанная на рисунке, собрана из одинаковых резисторов и одинаковых вольтметров. Первый вольтметр показывает $U_1 = 10 \text{ В}$, а третий $U_3 = 8 \text{ В}$. Какое показание второго вольтметра?

Решение и критерии оценивания:

Обозначив через r сопротивление каждого из вольтметров, вводя силы тока, как показано на схеме, можно записать:

$$U_1 = I_1 \cdot r, \quad U_2 = I_2 \cdot r, \quad U_3 = I_3 \cdot r \quad (2 \text{ балла})$$



С другой стороны

$$U_2 = U_3 + I_3 R = U_3 + U_3 \frac{R}{r} \quad (2 \text{ балла}), \quad (1)$$

$$U_1 = U_2 + (I_2 + I_3)R = U_2 + (U_2 + U_3) \frac{R}{r} \quad (2 \text{ балла}). \quad (2)$$

Исключая из полученной системы уравнений R/r , получаем:

$$U_2^2 + U_2 U_3 - U_1 U_3 - U_3^2 = 0 \text{ (2 балла).}$$

Отсюда:

$$U_2 = -\frac{1}{2}U_3 + \sqrt{\frac{U_3}{4}(5U_3 + 4U_1)} \approx 8.6 \text{ В (2 балла).}$$

Ответ: $U_2 \approx 8.6 \text{ В.}$