Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике

10 класс

10.1. Можно ли в таблице 4 х 4 расставить некоторые натуральные числа так, чтобы сумма чисел в каждой следующей строке была на 2 больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце увеличивалась на 3 по сравнению с предыдущим?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть A – сумма чисел в первой строке, B − сумма чисел в первом столбце, а S – сумма всех чисел в таблице. Тогда $S = A + (A + 2) + (A + 4) + (A + 6) = 4(A + 3)$ и $S = B + (B + 3) + (B + 6) + (B + 9) = 4(B + 4) + 2$. Так как первое число кратно 4, а второе нет, получаем противоречие.

10.2 Даны положительные числа x, y, z. Докажите, что $x^2(1+y^2)+y^2(1+z^2)+z^2(1+x^2)\ge 6xyz.$

Решение.

1-й способ. Поделив обе части на xyz, получим равносильное неравенство

$$\frac{x}{yz}+\frac{xy}{z}+\frac{y}{xz}+\frac{yz}{x}+\frac{z}{xy}+\frac{xz}{y}\ge 6.$$

Осталось воспользоваться тем, что сумма положительных взаимно обратных чисел не меньше 2, а в левой части неравенства мы имеем три пары таких чисел.

2-й способ. Исходное неравенство можно переписать в виде

$$(x-yz)^2+(y-zx)^2+(z-xy)^2\ge 0.$$

3-й способ. Раскроем скобки и применим неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим для шести чисел:

$$x^2+x^2y^2+y^2+y^2z^2+z^2+z^2x^2\ge 6\sqrt[6]{x^6y^6z^6}=6xyz.$$

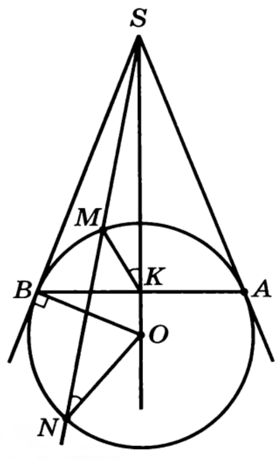
10.3. Пусть $a = 1$, $b = 3$. На каждом шаге будем увеличивать a на 1, а b – на 7. Будут ли на некотором шаге оба числа a и b кратны числу 11?

Ответ. Нет.

Решение. Через n шагов $a = 1 + n$ и $b = 3 + 7n$. Предположим, что они делятся на 11. Но тогда и число $7a - b$ тоже должно делиться на 11, что неверно, так как $7a - b = 4$.

10.4. Через точку S, лежащую вне окружности с центром O, к окружности проведены две касательные, касающиеся окружности в точках A и B, и секущая, пересекающая окружность в точках M и N. Прямые AB и SO пересекаются в точке K. Докажите, что точки M, N, K и O лежат на одной окружности.

Доказательство. Пусть точка M лежит между S и N. Достаточно доказать, что $\angle MKO + \angle ONM = 180°$, т.е. $\angle ONS = \angle MKS$. Отрезок BK – высота прямоугольного треугольника SBO, поэтому $SK \cdot SO = SB^2$. Но по свойству касательной и секущей $SB^2 = SM \cdot SN$, следовательно, $\frac{SK}{SN} = \frac{SM}{SO}$. Отсюда получаем, что треугольники SKM и SNO с общим углом NSK подобны и, значит $\angle SNO = \angle SKM$ (см. рис.).



10.5 Можно ли найти 20-значное (в десятичной записи) натуральное число, десятичная запись которого начинается с 11 единиц и которое является точным квадратом (другого натурального числа)?

Ответ. нет.

Решение. Рассмотрим любое 20-значное число, начинающее с 11 единиц:

$N = \underbrace{11...1}_{11}\,\underbrace{0...0}_{9} + m,$ где $0 \le m \le 10^9 - 1.$ (m – это число, образованное последними 9-ю цифрами числа N).

Для дальнейшего удобства рассмотрим число $9N$ – оно окажется точным квадратом, только если N окажется точным квадратом:

$$9N = \underbrace{99...9}_{11} \cdot 10^9 + 9m = (10^{11} - 1) \cdot 10^9 + 9m =$$

$$= 10^{20} - 10^9 + 9m = (10^{10})^2 - 10^9 + 9m.$$

Последнее число не может быть точным квадратом по следующей причине: оно больше, чем $(10^{10} - 1)^2$, и меньше, чем $(10^{10} + 1)^2$, и, поскольку делится на 9, не совпадает с $(10^{10})^2$.

Поясним: $(10^{10} - 1)^2 = (10^{10})^2 - 20 \cdot 10^9 + 1 < (10^{10})^2 - 10^9 \le 9N,$

$$(10^{10} + 1)^2 = (10^{10})^2 + 20 \cdot 10^9 + 1 > (10^{10})^2 - 10^9 + 9(10^9 - 1) \ge 9N.$$