Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике

9 класс

9.1. У Маши есть монеты достоинством 1, 2 и 5 рублей, причем монет каждого вида не меньше 10. Всего монет 3000, а их стоимость составляет 6000 рублей. Каким будет число монет достоинством 1 рубль – простым или составным?

Ответ. Составное.

Решение. Пусть монет достоинством 1 рубль – x, 2 рубля – y, 5 рублей – z. Получим систему $\begin{cases} x+y+z=3000, \\ x+2y+5z=6000. \end{cases}$ Вычитая из второго равенства первое, умноженное на 2, получим $x=3z$. Таким образом, число x не меньше 10 и делится на 3, значит, оно составное.

9.2. Найдите все решения уравнения $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$.

Ответ. (2;-1).

Решение. Преобразованием получим $(x+2y)^2+(y+1)^2=0$. Очевидно единственное решение (2;-1).

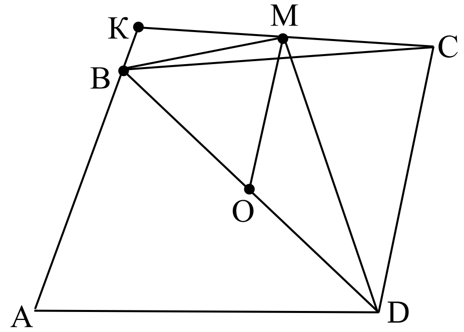
9.3. В классе 33 ученика, а сумма их возрастов составляет 430 лет. Докажите, что в классе найдутся 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260 лет.

Решение. Пусть $V_1 \ge V_2 \ge \ldots \ge V_{20} \ge V_{21} \ge \ldots \ge V_{33}$ – возрасты учеников, $A=V_1+V_2+\ldots+V_{20}$, $B=V_{21}+\ldots+V_{33}$. По условию $A+B=430$. Ясно, что $A \ge 20V_{20}$, $B \le 13V_{20}$, откуда $B \le \frac{13}{20}A$. Поэтому $A+\frac{13}{20}A \ge 430$, $\frac{33}{20}A \ge 430$, $A \ge \frac{430\cdot 20}{33}=\frac{430}{33}\cdot 20=\left(13+\frac{1}{33}\right)\cdot 20>13\cdot 20=260.$

Т.о. сумма А возрастов 20 «самых возрастных» учеников больше 260.

9.4. На стороне *AB* параллелограмма *ABCD* взята точка *K* так, что $AK=BD$. Точка *M* – середина *CK*. Докажите, что $\angle BMD=90^{\circ}$.

Решение. Можно основываться на следующем простом факте: если медиана треугольника равна половине той стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный и эта медиана выходит из вершины прямого угла.



См. рис. для случая $BD>AB$.

O – середина BD.

Пусть $AB=DC=p$, $AK=BD=q$.

Тогда $BK=AK-AB=q-p$.

OM – средняя линия трапеции DBKC – равна $\frac{DC+BK}{2}=\frac{p+(q-p)}{2}=\frac{q}{2}$.

Т.о. в треугольнике BMD медиана MO равна $\frac{1}{2}BD$. Значит, $\angle BMD=90^{\circ}$.

Аналогично рассматривается второй случай, когда BD<AB.

9.5. В приборе имеется $n \geq 4$ контактов и $m \geq 4$ проводов, причем каждый провод соединяет ровно два контакта. Известно, что для любых четырех проводов найдутся такие два контакта, что любой из этих проводов подсоединен хотя бы к одному из них. Докажите, что найдутся такие три контакта, что любой провод в приборе подсоединен хотя бы к одному из них.

Решение. Можно считать, что любая пара контактов соединена не более чем одним проводом, и проводов не меньше четырех. Если найдутся два провода AB и XY, не имеющие общих концов, то любой третий провод должен иметь общий конец либо с AB, либо с XY. Значит, в любом случае нашлись два провода, имеющие общий конец (скажем, AB и AC). Если любой провод имеет концом один из контактов A, B, C, то A, B, C — требуемая тройка контактов. Иначе имеется провод DE, где контакты D и E отличны от A, B, C. Добавим к AB, AC, DE четвертый провод XY. Для них найдутся такие два контакта, что любой из этих четырех проводов подсоединен хотя бы к одному из них. Один из контактов — D или E, значит, другой — A. Таким образом, любой провод подсоединен к одному из контактов A, D, E, что и требовалось.