МАТЕМАТИКА. 10 КЛАСС.

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

1. (7 баллов) Точка O — центр квадрата $ABCD$. Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках A, B, C, D, O, сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

Решение. Например, подойдёт цепочка $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.
Критерии проверки.

- Приведён верный набор из семи векторов, либо доказано, что его сумма равна нулевому вектору, либо очевидно (исходя из обозначений векторов), что сумма равна нулевому вектору (например, так, как указано в ответе) — 7 баллов.
- Приведён верный набор из семи векторов, про который не доказано, что его сумма равна нулевому вектору, — 5 баллов.
- Приведён набор из шести векторов, удовлетворяющий остальным условиям задачи, — 2 балла.
- Приведён набор из семи векторов, но среди них есть одна пара равных векторов — 1 балл.
- Приведён набор векторов, сумма которых не равна нулевому вектору, — 0 баллов.

2. (7 баллов) Можно ли все натуральные числа от 1 до 800 разбить на пары так, чтобы сумма любой пары чисел делилась на 6?
Ответ. Нет.
Решение. Если требуемое в задаче возможно, то числа, кратные шести, должны разбиться на пары. Так как $800 = 133 \cdot 6 + 2$, чисел от 1 до 800, кратных шести, ровно 133. Противоречие: 133 числа нельзя разбить на пары.
Замечание. Среди чисел от 1 до 800 остаток 0 при делении на 6 дают 133 числа, остаток 1 — 134 числа, остаток 2 — 134 числа, остаток 3 — 133 числа, остаток 4 — 133 числа, остаток 5 — 133 числа. Следовательно, противоречие также можно получить иначе. Например, число, дающее остаток 1, должно быть в паре с числом, дающим остаток 5. Значит, таких чисел должно быть поровну, что не так.
Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно подсчитано количество чисел с теми остатками, на которых основано получение противоречия, но ошибочно указано количество чисел с какими-то другими остатками — 5 баллов.
- Утверждается, что «не сойдутся остатки чисел», но не приводятся конкретные противоречия. Например, говорится, что чисел, кратных 6, нечётное количество, но не объясняется почему — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

3. (7 баллов) Участвуя в шахматном турнире, Вася сыграл 52 партии. По старой системе подсчёта очков (1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ очка за ничью и 0 очков за поражение) он набрал 35 очков. Сколько очков он набрал по новой системе подсчёта очков (1 очко за победу, 0 очков за ничью и –1 очко за поражение)?

Ответ. 18 очков.

Решение.

Первый способ. Пусть Вася в турнире a раз победил, b раз сыграл вничью и c раз проиграл. Тогда $a + b + c = 52$, $a + \frac{b}{2} = 35$. Нужно найти значение $a - c$. Из второго соотношения следует, что $b = 70 - 2a$. Тогда $a + (70 - 2a) + c = 52$, откуда $70 + c - a = 52$, $a - c = 18$.

Второй способ. При системе подсчёта $(1; \frac{1}{2}; 0)$ Вася набрал 35 очков, значит, при системе (2; 1; 0) он наберёт вдвое больше, то есть 70 очков.

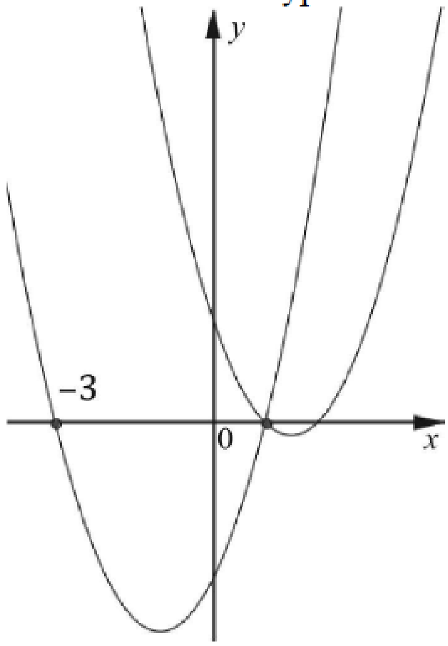
При системе (1; 0; –1) Вася теряет по одному очку в каждой партии (по сравнению с системой (2; 1; 0)). Значит, он наберёт 70 – 52 = 18 очков.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное рассуждение, в котором верный ответ не получен из-за арифметической ошибки, — 5 баллов.
- Рассмотрен частный случай, то есть конкретные значения числа побед, ничьих и поражений, удовлетворяющие условию задачи, и получен верный ответ — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

4. (7 баллов) На координатной плоскости изображены графики функций $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + cx + b$.

Найдите значения b и c. В ответе запишите уравнения каждой из функций.



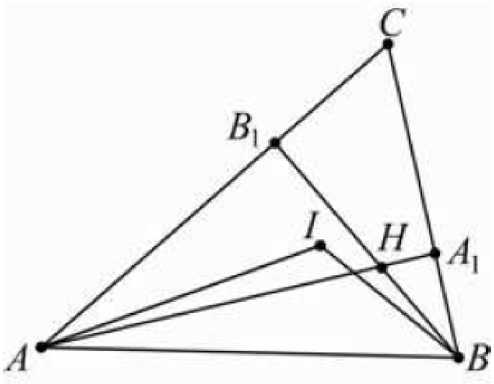
Ответ. $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = x^2 - 3x + 2$.

Решение. Некоторое число t является корнем обоих трёхчленов, поэтому $t^2 + bt + c = t^2 + ct + b$, откуда $(b - c)(t - 1) = 0$. Так как $b \neq c$ (иначе параболы совпадут), получаем, что $t = 1$. Если парабола $y = x^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках –3 и 1, то по теореме, обратной теореме Виета $b = -(-3 + 1) = 2$, $c = -3 \cdot 1 = -3$.

Критерии проверки.

- Полное верное решение — 7 баллов.
- Приведён верный ответ, и показано, что он подходит (в частности, указана координата общей точки пересечения парабол с осью абсцисс), — 3 балла.
- Верно найден общий корень, но при нахождении коэффициентов получены неверные значения из-за арифметической ошибки — 2 балла.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

5. (7 баллов) Две вершины, центр вписанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника лежат на одной окружности. Найдите угол при третьей вершине.



Ответ. 60°.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором проведены высоты AA_1 и BB_1. Пусть точка H — точка пересечения высот, точка I — центр вписанной окружности.

1. Сумма углов четырёхугольника A_1HB_1C равна 360°. Получаем

$$\angle AHB = \angle A_1HB_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle C = 180^\circ - \angle C.$$

2. По теореме о сумме углов треугольника имеем соотношения $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (для треугольника ABC) и $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \angle AIB = 180^\circ$ (для треугольника ABI). Отсюда

$$\angle AIB = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180^\circ - (180^\circ - \angle C) : 2 \Rightarrow \angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}.$$

3. Точки A, B, H и I лежат на одной окружности. Так как треугольник ABC остроугольный, точки H и I лежат по одну сторону от хорды AB, то есть вписанные углы AIB и AHB опираются на одну и ту же дугу. Значит,

$$\angle AIB = \angle AHB, \text{ откуда } 90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle C, \text{ а значит } \angle C = 60^\circ.$$

Критерии проверки.

- Полное верное решение — 7 баллов.

Замечание. Если ученик ссылается на результаты пунктов 1 и 2 решения как на общеизвестные, то баллы не снижать.

- В целом верный ход решения, но упущено обоснование того, что углы AIB и AHB опираются на одну и ту же дугу (не использовано то, что треугольник остроугольный), — 5 баллов.
- В целом верный ход решения, но при решении уравнения $90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle C$ допущена ошибка и получен неверный ответ — 5 баллов.
- Приведены пункты 1 и 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 2 балла.
- Приведён только пункт 1 или только пункт 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 1 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.