10 класс. Ключи.

Задание 1. В настоящее время есть монеты 1, 2, 5, 10 рублей. Укажите все денежные суммы, которые можно уплатить как четным, так и нечетным числом монет.

Решение. Любую сумму денег, большую 10 рублей, можно составить из монет в 10 и 1 рубль. Четность числа монет можно поменять с помощью размена 10 рублей на 2 монеты по 5 рублей. А сумма денег, меньшая 11 рублей, может быть представлена с помощью монет по 1 рублю, четность же легко поменять, заменив 2 монеты по 1 рублю на монету в 2 рубля. Таким образом, любая сумма денег, большая 1 рубля, может быть уплачена как четным, так и нечетным числом монет.

Задание 2. Докажите, что $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2010}$ делится на 6.

Решение. $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2010} = 5\,(1 + 5) + 5^3\,(1 + 5) + \ldots + 5^{2009}\,(1 + 5) = 6\,(5 + 5^3 + \ldots + 5^{2009})$ Так как первый множитель делится на 6, то и все произведение делится на 6.

Задание 3. В четырехугольнике *ABCD* диагонали пересекаются в точке *M*. Известно, что *AM = 1,*

BM = 2, CM = 4. При каких значениях *DM* четырехугольник *ABCD* является трапецией?

Ответ: при *DM = 8* или *DM = 0,5*

Решение. Возможны два варианта: основаниями трапеции являются стороны *AB* и *CD* или *AD* и *BC*. *Рассмотрим первый случай*. Тогда должно выполняться $\Delta\ AMB \sim \Delta$ CDM, откуда $\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{DM}$ и $DM = \frac{MC \cdot BM}{AM}$, $DM = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8$. *Во втором случае подобными треугольниками будут* $\Delta\ AMD \sim \Delta$ BMC. Тогда и $\frac{AM}{MC} = \frac{DM}{BM}$ и $DM = \frac{AM \cdot BM}{MC}$,.

Задание 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 1 \\ xy = -8 \end{cases}$$

Указание. Обозначить $\sqrt[3]{x} = u, \sqrt[3]{y} = v$ **,** получим систему

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ (uv)^3 = -8 \end{cases}$$

Откуда легко найти пары значений u и v, затем значения x и y. Ответ: (8;-1), (-1;8).

Задание 5. Тридцать школьников - десятиклассников и одиннадцатиклассников - обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый десятиклассник пожал руку восьми одиннадцатиклассникам, а каждый одиннадцатиклассник подал руку семи десятиклассникам. Сколько было десятиклассников и сколько одиннадцатиклассников?

Решение. Пусть x – число десятиклассников, а y – число одиннадцатиклассников; тогда $x + y = 30$. Второе уравнение мы получим, если подсчитаем двумя способами общее количество рукопожатий. С одной стороны, число рукопожатий $8x$, поскольку от каждого десятиклассника «исходит» 8 рукопожатий. С другой стороны, число рукопожатий равно $7y$, так как от каждого одиннадцатиклассника «исходит» 7 рукопожатий. Следовательно, $8x = 7y$. Решая полученную систему уравнений, находим: $x = 14$, а $y = 16$

Ответ: 14 десятиклассников и 16 одиннадцатиклассников.