

9 класс. Ключи.

Задание 1. Найдите последнюю цифру числа 1989^{1989} .

Решение. Заметим, что последняя цифра числа 1989^{1989} совпадает с последней цифрой числа 9^{1989} . Выпишем последние цифры нескольких начальных степеней числа 9: 9, 1, 9, 1, 9, 1. Ясно, что все нечетные степени девятки оканчиваются на 9. Поэтому последняя цифра числа 1989^{1989} — девятка.

Ответ: 9.

Задание 2. Сумма корней некоторого квадратного уравнения равна 1, а сумма их квадратов равна 2. Чему равна сумма их кубов?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения

Согласно условию, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 = 2$, тогда $x_1 \cdot x_2 = -0,5$. Найдем значение суммы $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = 1 \cdot (2 + 0,5) = 2,5$.

Ответ: 2,5.

Задание 3. По трём медианам m_a , m_b и m_c ΔABC найти длину стороны $AC = b$.

Решение. Обозначим точку пересечения медиан точкой O , то $AO = \frac{2}{3}m_a$, $OC = \frac{2}{3}m_c$, $OD = \frac{1}{3}m_b$. Достроим ΔAOC до параллелограмма $AOCE$. Известно, что в параллелограмме

$$AC^2 + OE^2 = 2(AO^2 + OC^2) \text{ или } b^2 + \frac{4}{9}m_b^2 = 2\left(\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9}m_c^2\right), \text{ откуда находим}$$

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}.$$

Ответ: $b = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2}$.

Задание 4. Сократите дробь $\frac{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5) + 3}{(x^2 + x + 1)((x^2 + x + 7) + 9)}$.

Решение. Пусть $x^2 + x + 1 = y$, то $\frac{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5) + 3}{(x^2 + x + 1)((x^2 + x + 7) + 9)} = \frac{y(y + 4) + 3}{y(y + 6) + 9} =$

$$\frac{y^2 + 4y + 3}{y^2 + 6y + 9} = \frac{(y + 1)(y + 3)}{(y + 3)^2} = \frac{y + 1}{y + 3}, \quad \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 4}$$

Ответ: $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 4}$.

Задание 5. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы в слове «камзол»?

Решение. В слове две гласные буквы. Имеется только два способа выбора любой из них: или буквы а, или буквы о. Согласных букв в слове четыре. Любую из них можно выбрать четырьмя способами. Тогда число способов выбрать одну гласную и одну согласную буквы равно произведению $2 \cdot 4 = 8$. **Ответ: 8 способов.**