

Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике

11 класс

11.1. Петя задумал двузначное число. Оказалось, что если из задуманного числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, а если сложить кубы цифр задуманного числа, то получится 35. Какое число задумал Петя?

Ответ. 32.

Решение. Пусть задуманное число $\overline{ab} = 10a + b$. Необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} a^3 + b^3 = 35, \\ \overline{ab} - 9 = \overline{ba}. \end{cases}$ Из второго уравнения получаем $a = b + 1$, тогда первое уравнение примет вид $(b + 1)^3 + b^3 = 35$, откуда $b = 2$, тогда $a = 3$.

11.2. На турнир приехали несколько шахматистов. Каждый сыграл по одной партии с каждым, кроме новичка Васи, который сыграл не со всеми, причем ни с кем не провел более одной партии. Всего было сыграно 197 партий. Сколько партий сыграл Вася?

Ответ. 7 партий.

Решение. Если каждый из n человек сыграет по одной партии со всеми остальными, то все сыграют по $n-1$ партии, а всего будет сыграно $n(n-1)/2$ партий, ибо в каждой из них участвуют двое. Определим, сколько было людей, кроме Васи. Если играют 20 человек, то всего будет сыграно 190 партий. Т.е. Васе останется сыграть 7 партий. Если же без Васи было меньше 20 человек, то они сыграли без него не более $19 \cdot 18 / 2 = 171$ партии, т.е. на долю Васи осталось бы не менее 26 партий, а человек, с которыми он мог бы сыграть – не более 19 – противоречие. Если же без Васи было больше 20 человек, то только они одни сыграли бы больше 197 партий ($21 \cdot 20 / 2 = 210 > 197$). Таким образом, ответ единственный – Вася сыграл 7 партий.

11.3. Между двумя равными двузначными числами вставили вдвое меньшее число. Может ли при этом получиться запись числа, являющегося точным квадратом? Если да, найдите все такие числа.

Ответ. Да. Единственное такое число $763876 = 874^2$.

Решение. Пусть x – исходное двузначное число, $y = 0,5x$. Если y – однозначное число, то имеем $A = XUX = 1000x + 100y + x = 1001x + 100y = 2102y = 1051 \cdot 2y$.

Можно проверить, что число 1051 простое. Поскольку A делится на 1051 и не делится на 1051^2 (т.к. $2y < 1051$), число A не является квадратом.

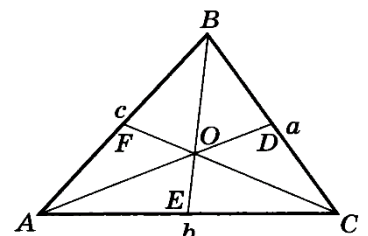
Пусть теперь y – двузначное число (при этом $10 \leq y < 50$).

Тогда, $A = XUX = 10000x + 100y + x = 10001x + 100y = 20102y = 19 \cdot 23^2 \cdot 2y$.

Если A – квадрат числа, то $y = 19 \cdot 2m^2 = 38m^2$ для некоторого натурального m .

Из того, что $y < 50$, получаем единственный вариант: $y = 38$.

11.4. Биссектрисы AD , BE , CF треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что если треугольники BOF и BOD равновелики, то треугольник ABC равнобедренный.



Решение. По условию, $S = \frac{1}{2}BF \cdot BO \cdot \sin \angle FBO = \frac{1}{2}BD \cdot BO \cdot \sin \angle DBO$. Это значит, что $BD=BF$. Но если a, b, c - длины сторон треугольника ABC , лежащих соответственно против углов A, B, C (см. рис.), то по свойству его биссектрисы $\frac{c}{BD} = \frac{b}{DC} = \frac{b}{a-BD}$, откуда $BD = \frac{ac}{b+c}$. Аналогично, $BF = \frac{ac}{a+b}$. Значит, $\frac{ac}{b+c} = \frac{ac}{a+b}$, и $c = a$.

11.5. На конгрессе присутствуют 200 ученых, каждый из которых знает ровно 4 языка. Известно, что из любых трех ученых какие-то двое могут говорить на одном языке. Докажите, что каким-то языком владеют не менее 26 участников конгресса.

Решение. Предположим сначала, что найдутся двое ученых, A и B , среди языков которых нет общего. Если X - любой из остальных 198 ученых, то из условия задачи вытекает, что либо A и X , либо B и X имеют общий язык. Поэтому хотя бы один из A и B , скажем, A , имеет какой-то общий язык с $n \geq \frac{198}{2} = 99$ учеными (с каждым ученым свой общий язык). Эти n ученых разбиваются на четыре группы в соответствии с тем языком, который у них общий с A . Хотя бы одна группа состоит из не менее, чем $\frac{n}{4} \geq \frac{99}{4} > 24$ ученых, т.е. не менее, чем из 25 ученых. В итоге вместе с A получаем не менее 26 ученых, которые знают один язык.

Второй случай: у любых двух ученых есть общий язык. Возьмем какого-нибудь ученого A . Он имеет общий язык с любым ученым X . Получаем: 199 ученых разбиваются на четыре группы, в соответствии с тем, какой из них язык общий с A . Хотя бы одна группа состоит не менее чем из $\frac{199}{4} > 49$ ученых, и все они знают один язык.